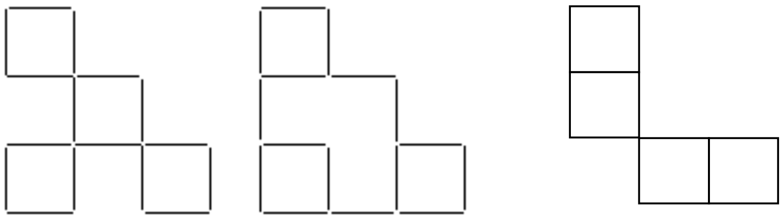
Nämnarens adventskalender 2009, lösningar

1. Här är tre sätt:



Det sista sättet är ett som bygger på att man tar bort två tändstickor.
Finns det fler sätt?

2. Den väger 160 g.
800-480=320g, dvs halva mängden marmelad väger 320g. Då väger all marmelad 640g. 800-640=160g, burken väger alltså 160g.

3. 2178.
Hej abcd! Eftersom du är fyrsiffrig och det är även din syster dcba som är 4 gånger så stor så måste du ligga mellan 1000 och 2499, alltså a är 1 eller 2. Men a måste vara jämn eftersom det är din systers sista siffra och hon är ju delbar med 4 alltså a=2. Du är minst 2000, dcba minst 8000 alltså d kan bara vara 8 eller 9. Men din sista siffra d kan inte vara 9 för då systerns sista (a) skulle vara 6 och inte 2. Nu vet jag att a=2 och d=8, därmed 2bc8 * 4 = 8cb2 dvs. (2008 + 10 * bc) * 4 = 8002 + 10 * cb Med lite algebra får vi 3 + bc * 4 = cb , alltså b kan inte vara större än 2 . Men 3 + bc * 4 är ett udda tal, alltså cb är udda, alltså b är udda alltså b=1. Nu har vi 3 + 1c * 4 = c1 vilket betyder 3 + (10 + c) * 4 = 10 * c + 1 och med lite algebra igen får vi c = 7.
Nu vet jag allt om dig 2178. Det stämmer att alla dina siffror är olika. Jag behövde inte använda den upplysningen.

4. 4 st.
För att få fram antalet familjemedlemmar kan man antingen gissa sig fram eller skriva upp en ekvation som löser problemet.
Om vi testar så börjar vi med att familjen består av 1 person (det brukar väl inte kallas för familj, men vi börjar här).
1 person:
Personen är 60 år. Om fem år är han/hon 65 år och för fem år sedan 55 år. 65 är inte dubbelt så stort som 55. Går ej.
2 personer :
Tillsammans 60 år. Om fem år är de tillsammans 70 år (två som blir fem år äldre) och för fem år sedan 50 år. 70 är ej dubbelt så mycket som 50.
Fortsätt på samma vis så märker du att om de är fyra i familjen är de tillsammans 80 år om fem år och 40 år för fem år sedan. 80 är dubbelt så mycket som 40.
Om du vill göra en ekvation så kan man beteckna antalet personer i familjen med n. Om fem år är hela familjens ålder 60 +5n. För fem år sedan hade familjen en ålder på 60-5n. Då får man ekvationen 60+5n=2(60-5n). Om man löser ekvationen så får man n=4.

En annan variant kan vara att de är fem personer i familjen, och att för fem år sen fanns inga barn i familjen. Den blivande mamman och pappan är 21 och 23 år gamla, totalt 44 år då. Fem år senare är familjens ålder 26+28+3+2+1= 60 år (tre barn har tillkommit). Om ytterligare fem år är familjens ålder 31+33+8+7+6+3= 88 år (yterligare ett barn har tillkommit).

5. Så här kan det gå till, det krävs minst 11 överfarter:
De två gummorna åker över tillsammans, en av dem återvänder till tomtarna.
En tomte åker över själv, går av båten och gumman som är där åker över till startsidan igen.

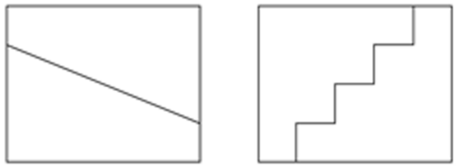
Upprepa samma procedur igen för att få över den andra tomten.

Då kommer de två gummorna finnas på startsidan och de två tomtarna är över på andra sidan. De båda gummorna åker över och en av dem återvänder, hämtar ryggsäckarna och åker över till de andra. Nu är alla gummor, tomtar och ryggsäckar över sjön.

6. PAPPA översätts till 26226, SUSSA översätts till 48446, SPADE översätts till 42671 och PADDA översätts till 26776.
De tvåsiffriga heltal som har tresiffriga kvadrater ligger mellan 10 och 31 ($9^2=81$, $10^2=100$ och $31^2=961$, $32^2=1024$). Det är enbart 11 (EE), 22 (PP) och 26 (PA) som kan stämma med de givna uppgifterna.
En början till att komma fram till detta är att starta med PP och EE. Mellan 10 och 31 finns bara 11 och 22 som har samma siffror både som ental och tiotal.

7. Talet 24 har faktorerna 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 eller 24.
Om det finns ett barn få hon alla 24 paket.
2 barn: 12 paket var.
3 barn: 8 paket var.
4 barn: 6 paket var.
6 barn: 4 paket var.
8 barn: 3 paket var.
12 barn: 2 paket var.
24 barn: ett paket var.
Om tomten har 25 paket så finns det inte lika på många vrianter. Talet 25 har faktorerna 1, 5 och 25.
1 barn: 25 paket själv.
5 barn: 5 paket var.
25 barn: 1 paket var.
Diskutera med eleverna hur det blir om man har 17 paket? Prata om primtal och om sammansatta tal.

8. Den triviala lösningen är att klippa rektangeln parallellt med en kant och få två rektanglar som kan läggas ihop på olika sätt. En annan variant är att klippa längs diagonalen och lägga ihop. Nedan följer två andra exempel:



Den vänstra bilden går att göra på flera sätt men för att få en kongruent rektangel finns endast möjligheten att lägga bitarna precis så att man får samma rektangel som den ursprungliga. Däremot i bilden till höger blir det annorlunda. Om man klipper enligt bilden och flyttar den högra delen ner en cm och en cm till vänster så får man en rektangel som är kongruent med den ursprungliga men vriden 90 grader trots att man inte har vridit någon av delarna. Kan du hitta fler sätt där den nya rektangeln är vriden jämfört med den första?

9. 2 minuter.
I första fallet kan man komma fram till att det tar två minuter för ett barn att äta upp en skumtomte. I andra fallet delar fem barn på fem skumtomtar, alltså en var. Det tar också två minuter.

10. 3 grå, 2 svarta och fyra randiga kattungar.
Tre kattungar var grå eftersom varsitt av de tre barnen fick en grå, och så fanns det inga fler kvar då. De svarta kattungarna var en färre än de grå, alltså två. De randiga var två fler än de svarta, alltså fyra.

11. 23 barnbarn, 3980 kr.
Om vi skriver antalet barnbarn med bokstaven n och den summa pengar tomtefar hade från början med bokstaven S så får vi två ekvationer:

S = 200n-620 (200 kr gånger antalet barnbarn och dra bort 620 kr)
S = 170n+70 (170 kr gånger antalet barnbarn och få 70 kr över)

Eftersom båda ekvationerna har samma vänsterled, får vi ekvationen 200n-620= 170n+70. Lös ut n och vi får att n=23. Sätt in i någon av ekvationerna och få ut S=3980kr.

12. Det var sju gäster i sällskapet.
Antag att antalet gäster var x. Då skulle x gäster dela på notan först. Men två slapp betala, alltså skulle x-2 gäster dela på notan. Hur mycket var skulle x-2 gäster då betala? Jo 1750/(x-2). Men informationen i uppgiften gav oss också att det räckte att de x-2 gästerna tillsammans lade 100 kr extra jämfört med ursprungliga summan då alla skulle dela, alltså 1750/x+100kr. Då får man ekvationen 1750/(x-2)=1750/x+100. Löser man denna andragradsekvation får man lösningarna 7 och -5, där 7 är den enda rimliga lösningen i vårt fall.

13. 40 och 88 liter.
Säg att det fanns mängderna a liter i fat A och b liter i fat B. Häll över b liter till fat B.
Nu finns det a-b i A och 2b i B.
Steg 2: 2(a-b) i A och 2b-(a-b)=3b-a i B
Steg 3: 2(a-b)-(3b-a) i A och 2(3b-a)
Nu var det färdigt och det fanns 64 liter i varje fat, dvs 2(a-b)-(3b-a)=64 och 2(3b-a)=64.
Detta blir ett linjärt ekvationssystem och vi får att A innehåller 88 liter från början och B 40 liter.

En annan lösningsstrategi är att lösa problemet bakifrån, dvs börja med att dt finns 64 liter i båda faten och jobba sig baklänges i alla stegen.

14. Du måste plocka 4 kulor.
Här har ordet garanterat en central roll. Om du plockar två kulor kan du ju få två med samma färg, det är sannolikt. Och om du plockar tre är det också sannolikt att få två med samma färg eller kanske tre med samma färg! Men när ordet garanterat står med så måste du verkligen få två av samma färg. Det finns tre sorters färger på kulorna. Om du då plockar precis fyra kulor eller fler så måste vi få ett par av samma färg, det finns ju bara tre färger.

15. Får lösas experimentellt. Resultaten kan variera från ett tillfälle till ett annat.
Ta gärna med lite formar och låt eleverna testa hur det kan se ut.

16. Genom att trycka på knappen U sju gånger kan man från vån 1 komma till vån 57. Om man då trycker fem gånger på knappen N kommer man ner till våning 2. Med samma följd av knappar kan man ta sig från vån 2 till 3, 3till 4 osv och slutligen 10 till 11 (till vån 11 åker man alltså via vån 66). Genom att trycka 4xU och sedan 3XN kan man ta sig från 2 till 1, 3 till 2, och slutligen 11 till 10. Vi kan konstatera att vi kan åka mellan godtyckliga våningar mellan 1 och 11.
Anta att vi befinner oss på våning k och vill komma upp till k+1. Låt oss skriva k=11xt+r samt k+1=8xm+s, där resttermen r är större än 0 men mindre än 12 medan resttermen s är större än 0 men mindre än 9. Genom att trycka txN kommer vi ner till våning r. Sedan kan vi genom att åka i hissen enligt proceduren beskriven i förra stycket nå våning r. Trycker vi då mxU kommer vi upp till våning k+1. Om vi skriver k=11xt+r samt k+1=8xn+u, r mellan 1 och 11 och u mellan 1 och 8 kan vi på liknande sätt beskriva färden från k tll k-1. Från detta följer att man kan åka mellan två godtyckliga våningar.

Man kan också bevisa det på följande sätt:
På grund av att 8 och 11 är relativt prima och 8+11<= 66 så kan man ta sig till vilken våning som helst.

Huset har v våningar och man kan åka med hissen u våningar upp eller n våningar ner.
Om u och n skulle t.ex. vara båda delbara med 3 så skulle man från våning 3 kunna åka bara till våningar som är delbara med 3.
Om u=8 och n=11 som är fallet men v=18 så från våning 11 kan man inte åka någonstans.
Man kan bevisa att om u och n är relativt prima och u+n<=v så kan man åka vart man vill.

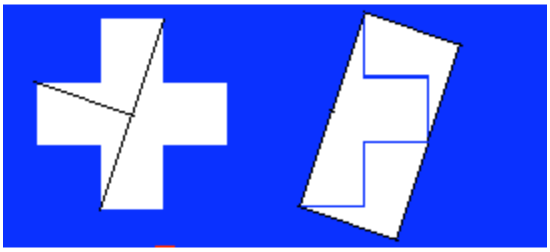
Man kan använda satsen som säger att om vi har två relativt prima tal så varje heltal kan utryckas som heltalskombination av dessa två. Satsen ingår inte i skolans kurser men så gott som varje år förekommer ett enkelt specialfall av det i julkalendern, t.ex. nr 11 förra året när Birgit och Görel skulle köpa kolor.

17. En minut.
Då loket just ska gå in i tunneln är hela tåget utanför. När loket går ut ur tunneln är hela tåget inne. Tåget måste alltså gå ytterligare 300 m innan sista vagnen lämnar tunneln. Tåget måste alltså gå 2x300 =600 m. Med hastigheten 10m/s tar detta 60 sek.

18. 36 nissar.
Det är fullsatt finns 120 människor på teatern. Om det är 90 människor där så är teatern fylld till ¾ (90/120). Alltså ska nissarna fylla teatern till ¼, alltså 144*¼= 36 st.

19. 9642*87531=843973902
En strategi att lösa sådana här typer av uppgifter är att starta med den största siffran i början av talet och alternera siffrorna mellan det fyrsiffriga och femsiffriga talet. Samtidigt ska man se till att hålla siffrorna så nära varandra som möjligt.
Jämför med att ha en rektangel där sidorna är lika stora som de två talen. Du vill maximera arean, och ju närmre en kvadrat du kan komma desto större blir arean.

20. Dela så här och flytta de 2 mindre delarna.



21.
Om de går ut var för sig så kan Lasse variera sin klädsel på 4 sätt, Lena på 4 sätt och Calle på 9 sätt.
Men om vi säger att alla tre ska gå ut samtidigt får vi tänka till.
Lasse vill ju inte bära blått. Om vi säger att Lasse har en vit mössa. Då kan Lena ha en röd eller blå och Calle likaså. Detta blir två varianter; Lasse – vit, Lena – röd, Calle – blå eller Lasse – vit, Lena-blå och Calle – röd.
Om vi säger att Lasse har en röd mössa så måste Lena ha den blåa (hon gillar ju inte vit) och Calle ha den vita.
Totalt antal variationer av mössor blir 3.

På samma sätt blir det med halsdukarna. Nu kan man variera varje mössval med halsduksval (varje variant av mösskombination kan kombineras på de tre kombinationer av halsdukar) så totalt sett blir det 9 kombinationer av vad de tre nissarna kan ha på sig.

22. Antal riddare från början är 5, tillkomna riddare är 4.

Låt oss börja med ett exempel. Om vi antar att fyra riddare ska tävla mot varandra, hur många tävlingsomgångar blir det då? Var och en tävlar mot tre andra, 4x3=12. Men då får vi även kombinationen att A möter B och B möter A så 12 måste delas på 2.

Nu gör vi en generell lösning. Anta att riddarna från början är x st. Då blir antalet kombinationer x*(x-1)/2 om vi räknar som exemplet ovan. Med ytterligare y st riddare blir antalet tävlingsomgångar (x+y)(x+y-1)/2. Nu var det så att det tillkom 26 tävlingsomgångar när y st riddare kom till, dvs (x+y)(x+y-1)/2- x*(x-1)/2=26. Förenkling ger att y(2x-1+y)=52. Då y är positivt är y och parenteser faktorer i talet 52. Faktorerna till 52 är 1, 2, 4, 13, 26 och 52. Test ger att de enda möjliga värden på y är 1 och 4, den första inte är trolig med tanke på textens utformning ” några okända riddare” . Om y=4 blir x=5.

23. Starta båda timglasen samtidigt, men gröten låter du vara än så länge. Låt gröten börja koka när timglaset som mäter sju min blir tomt. När timglaset som mäter 11 min blir tomt, vänd det. Gröten är klar när timglaset som mäter 11 min blir tomt igen.

24. Datumet i månaden är dubbelt så stor som månadens nummer, 14/7=4/2=16/8=24/12=2.