Kortfattade lösningar med svar till Student 2006

3 poäng

1 A — Samtliga produkter kan skrivas på formen $(2006 - a)(2006 + a)$ där $a = 0, 1, 2, 3$ eller 4. Konjugatregeln ger $2006^2 - a^2$.

2 D — Första siffran måste vara så liten som möjligt, dvs. 2. Därefter väljer vi det tal som ger lägst begynnelsesiffra. Det ger 2309415687

3 E — Vi kan måla alla rutor som ligger innanför den kvadrat som bestäms av rutan längst upp till höger och rutan längst ner till vänster.

4 C — Två kort, det som är märkt E och det som är märkt 7.

5 B — Det tar samma tid för de båda tågen att passera varandra.

6 D — Det räcker att betrakta arean hos smyckena. Det ringformade smycket har arean $\pi(6^2 - 4^2)$. Anta att det cirkelformade smycket har radien x cm. Då gäller att $\pi x^2 = \pi \cdot 20$, $x = 2\sqrt{5}$

7 C — Anta att differensen mellan två på varandra följande tal är x. Det är tre differenser mellan b och e. Det ger $3x = 10,5 - 5,5$. $x = 1,5$. $a = 5,5 - 1,5 = 4$

8 E — $(4^x)^y = 9^y = 256 \iff 4^{xy} = 4^4$, $xy = 4$

4 poäng

9 D — Det finns nio tal som börjar på 1, nio som börjar med 2, osv. till nio som börjar med 9. När man tar den 10:e lappen har man garanterat två tal med samma förstasiffra.

10 E — $1/AC = \cos\alpha \iff AC = 1/\cos\alpha$, $AC/AD = \cos\alpha \iff AD = AC/\cos\alpha = 1/\cos^2\alpha$

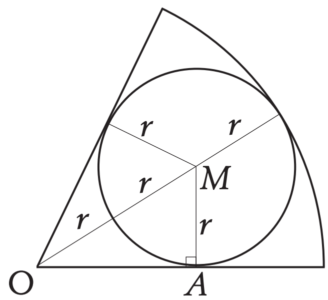
11 B — Bland talen 0, 1, 2, ... , 36 finns 11 primtal. Sannolikheten är 11/37

12 A — Det ensiffriga talet kan vara 6, 7, 8 eller 9 eftersom resten är mindre än delaren. $1001 - 5 = 996$ är delbart med 6. $2006 = 338 \cdot 6 + 2$.

13 A — Trafikmärkets area är $\pi \cdot 20^2 = 400\pi$. Arean av de fyra kvartscirklarna är då $400\pi/2 = 200\pi$. Radien fås ur ekvationen $\pi r^2 = 200\pi$.

14 E — $a+b+c = 78$ och $a-b-c = 40$ ger $a = 59$. Då är summan $b + c = 19$ som är ett udda tal. Då måste $c = 2$ och $b = 17$.

15 A — Anta att den inskrivna cirkeln har radien r och arean πr^2. Då har cirkelsektorn radien $R = 3r$. Dra radien R i cirkelsektorn genom den inskrivna cirkelns medelpunkt M. Den rätvinkliga triangeln OAM är en halv liksidig triangel. Det ger att cirkelsektorns medelpunktsvinkel är 60°, och dess area är $\pi(3r)^2/6 = 3\pi r^2/2$. Förhållandet mellan areorna är 3:2.



16 E — Antal matcher är $16 \cdot 15/2 = 120$ och antal utdelade poäng är 120. Anta att jumbolaget har fått a poäng ($a \geq 0$) och att differensen mellan lagens poängtal är d ($d \geq 1$). Då har vi följande aritmetiska talföljd $a, a+d, a+2d, ..., a+15d$. Summan av talföljden är $(a+(a+15d)) \cdot 16/2 = 120$, $2a+15d = 15$. De enda tal som uppfyller ekvationen är $a = 0$ och $d = 1$.

5 poäng

17 B

Anta att kören hade x flickor och $(x + 30)$ pojkar förra året. Då gäller
$1{,}05(x+30) + 1{,}2x = 1{,}1(x+30+x) \iff 1{,}05x+31{,}5+1{,}2x = 2{,}2x+33 \iff$
$0{,}05x=1{,}5 \iff x=30$, dvs. antal medlemmar förra året var 90 och i år är det 99.

18 C

Gör byten enligt följande: vågrät 1, ruta 1 och 4, vågrät 2, ruta 2 och 3, vågrät 4, ruta 2 och 4 och slutligen lodrät 2, ruta 3 och 4.

19 A

Vi kan ordna bråken i storleksordning enligt följande:

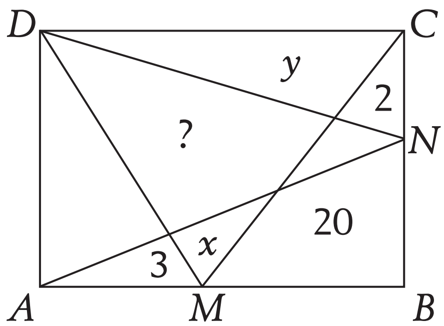
$$\frac{a}{b-1} > \frac{a}{b-\frac{1}{2}} > \frac{a}{b+\frac{1}{3}} > \frac{a}{b+\frac{1}{2}} > \frac{a}{b+1}$$

20 C

$y = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + ...+ 2004\cdot 2006 =$
$= (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1)+ ... + (2005-1)(2005+1) =$
$= 2^2-1 + 3^2-1 + 4^2-1 + ... + 2005^2-1$
$x-y = 1^2 - 2004(-1) = 2005$

21 C

Vi betecknar areorna av de två mindre trianglarna i triangel DCM med x respektive y. Arean av triangel DCM är $x + ? + y$ och lika med halva rektangelarean.
Den sammanlagda arean av trianglarna DCN och NBA är också halva rektangelarean. Det ger $x + ? + y = 3 + x + 20 + 2 + y$
$\iff ? = 25$



22 B

Beteckna rätblockets sidor med a, b och c och rymddiagonalen med d. Då gäller att $a^2 + b^2 = 8^2$, $a^2 + c^2 = 55$, $b^2 + c^2 = 9^2$ och $c^2 + 8^2 = d^2$. De tre första ekvationerna ger $c^2 = 36$.

23 D

För rötterna x_1 och x_2 till ekvationen $x^2 - bx + 80 = 0$ gäller att $x_1 + x_2 = b$ och $x_1x_2 = 80$. Vi kan skriva 80 som produkten av två olika positiva jämna heltal på tre sätt, nämligen $80 = 2\cdot 40$, $80 = 4\cdot 20$ och $80 = 8\cdot 10$ och det ger tre olika b-värden, $b = 42$, $b = 24$ och $b = 18$.

24 B

Låt de tio talen vara a, $a + 1$, $a + 2$, ... , $a + 9$. Summan av talen är $10a + 45$. Låt b vara det borttagna talet, då gäller att $10a + 45 = 2006 + b \iff 10a = 1961 + b$. Eftersom VL är delbart med 10 så är även HL delbart med 10, det ger $b = 219$.

Arbeta vidare med Student 2006

Det är vår förhoppning att du ska finna många intressanta uppslag bland årets Känguruproblem och att denna problemsamling ska kunna inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag till arbeten.

Många av känguruproblemen kan lösas med olika metoder t ex laborativa eller genom att man ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt och på så sätt komma fram till olika lösningsvarianter att jämföra och se vilken de finner enklast. De kan också formulera egna aktiviteter eller problem med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över exemplen. Att jämföra problemen och göra kopplingar inom och utom matematik är en utvecklingsmöjlighet. Att kunna se likheter mellan olika problem, att kunna se vad som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av problemlösning. Flera av problemen har anknytning till problem som varit med i tidigare omgångar. Vi visar på några sådan kopplingar, men det finns fler och också i andra tävlingsklasser. Alla tidigare problem finns att hämta på namnaren.ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 Visa hur man kan utnyttja konjugatregeln för att jämföra produkterna. Produkterna kan även tolkas geometriskt som arean av rektanglar med de givna sidlängderna. Anknyt även till nr 20.

2 Vilket blir det största talet? Hur många olika 10-siffriga tal kan vi bilda av de sex ursprungliga talen? Be eleverna konstruera liknande problem åt varandra.

3 Vilken area har det minsta området med samma omkrets? Vilken area har det största området med samma omkrets? Låt även eleverna lösa nr 9 på Ecolier.

4 Resonera med eleverna om vilka kort som ska vändas. Peter påstående är en implikation. När är en implikation sann? Måste omvändningen gälla? Om man negererar Peters påstående, hur lyder det då?

5 Detta är en klassisk frågeställning. Hur lång tid har förflutit om man startar en klocka när tågen möts och knäpper av den när den de sista vagnarna passerar varandra? Hur lång tid tar det för tågen att passera en person som står på marken?

6 Diskutera lösningsmetoder med eleverna. Jämför även nr 19 på Junior. Liknande problem har förekommit i tidigare Kängurutävlingar, t ex nr 7 och 10, Junior 2004.

7 Ändra frågeställningen, t ex $b = -1{,}5$ och $e = 3$. Ta upp aritmetisk talföljd. Anknyt till nr 16. Liknande problem är nr 4 och nr 6 Cadet 2003.

8 Diskutera potenslagarna. Ett liknande problem var nr 23 Student 2005.

9 Hur många niosiffriga tal finns det som uppfyller villkoret? Se även nr 16 på Junior och nr 18 Student 2005, nr 19 Junior 2005, nr 12 Student 2004.

10 Låt eleverna lösa problemet. Vilka längder har övriga okända sidor? Bygg vidare med ytterligare en rätvinklig triangel ADE . Vilken längd får sidan AE?

11 Be eleverna beskriva ett primtal.

12 Vad menas med delbarhet? Vilken blir resten? Om b inte är en delare i a, kan vi skriva $a = kb + r$ (a, b, k, r heltal). Vad kan man säga storleken av resten r?
Ta upp mer om begreppen konguens och modulus.
Mer problem kring delbarhet finns på Benjamin nr 17, CadetGy nr 2, Junior nr 5.

13 Diskutera hur man löser uppgiften. En enklare uppgift är Junior nr 19.

14 Diskutera lösningsmetoder.

15 Låt eleverna beskriva hur de löser problemet. Hur lång är cirkelbågen? Vilket är förhållandet mellan cirkelns och cirkelsektorns omkrets.

16 Hur många matcher spelas? Ta upp aritmetisk talföljd. Hur bestämmer man summan av en aritmetisk talföljd?

17 Repetera förändringsfaktor. Ändra förhållandet mellan antal pojkar och flickor.

18 På hur många olika sätt kan man skapa mönstret i figur 2 utifrån figur 1? Liknande problem är nr 2 och 3 Student 2005, nr 15 Junior 2004.

19 Låt eleverna komma på en metod att jämföra kvoterna. Vilka operationer är tillåtna för att kvoterna ska kunna skrivas om så att de kan jämföras. En enkel kvotövning är nr 1 Cadet 2002.

20 Låt eleverna arbeta med konjugatregeln och skriva om uttrycket y som en summa av kvadrattermer. Talet x kan man tolka som summan av kvadrater med sidan n, $n = 1, 2, 3,...,2005$.
Talet y kan man tolka som summan av rektanglar med sidorna $(n-1)$ och $(n+1)$, $n = 2, 3,...2005$.
Jämför för samma värde på n differensen mellan kvadraten och rektangeln, t ex för $n = 2$, kvadraten är 2^2, rektangeln är $1 \cdot 3$, differensen är 1, osv.

21 Går det att bestämma arean av de övriga delområdena?

22 Låt eleverna rita ett rätblock, dra rymddiagonalerna och markera de givna sidorna. Vilket samband finns det mellan rymddiagonalens längd och sidornas längder.

23 Diskutera lösningsmetoder med eleverna.
Hur ska man resonera om man använder pq-formeln?
Hur många olika värden kan talet b ha om man ändrar villkoret till två olika, positiva heltalslösningar.

24 Diskutera lösningsmetoder med eleverna. Problem med konsekutiva tal har förekommit tidigare, t ex nr 6 Student 2005, nr 21 Junior 2004, nr 23 CadetGy 2005.