Cadet för gymnasiet

Avdelning 1. Trepoängsproblem

1 $\dfrac{2007}{2+0+0+7} =$

a: 1001 b: 11 c: 223 d: 191 e: 123

(Sverige)

---

2 Boris är född 1 januari 2002 och han är 1 år och 1 dag äldre än Irina. Vilken dag föddes Irina?

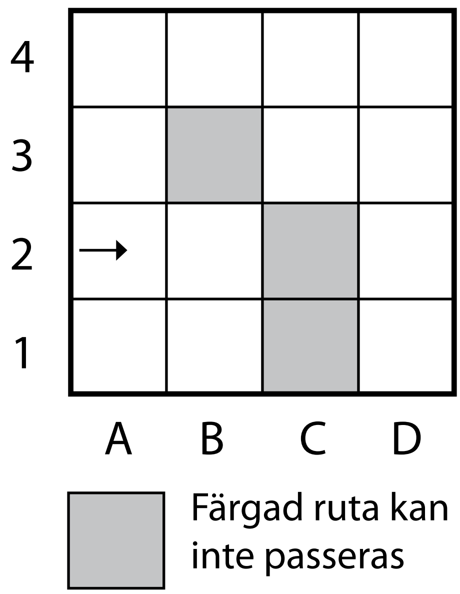
a: 2 januari 2003 b: 2 januari 2001 c: 31 december 2000
d: 31 december 2002 e: 31 december 2003

(Ryssland)

---

3 En robot går runt på ett bräde. Den startar från ruta A2 och går i pilens riktning. Den går hela tiden stegvis rakt fram tills den stöter på ett hinder eller en kant. Då svänger den till höger. Roboten stannar om den inte kan gå framåt när den svängt till höger. På vilken ruta kommer den att stanna?

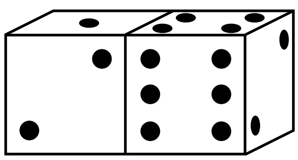
a: B2 b: A1 c: D4
d: D1 e: den stannar aldrig



(Serbien)

---

4 Hur många tärningsögon finns det sammanlagt på de sidor som du inte kan se på bilden?



a: 25 b: 12 c: 7 d: 27 e: inget av dessa svar

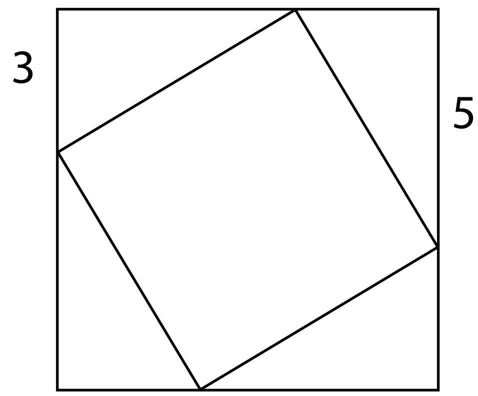
(Bulgarien)

5 På båda sidor längs en parkväg ska man plantera rosenbuskar. Från den första busken till den sista är det 20 m. Buskarna ska planteras med två meters mellanrum. Hur många buskar ska man plantera?

a: 22 b: 20 c: 12 d: 11 e: 10

(Kroatien)

6 En liten kvadrat ligger inuti i en större kvadrat så som figuren visar. Beräkna den lilla kvadratens area.



a: 16 b: 28 c: 34

d: 36 e: 49

(Vitryssland)

7 Tajana, Blanka, Ines och Monica sysslar med var sin av följande idrotter: slalom, fotboll, volleyboll och judo. Tajana ägnar sig inte åt bollsport. Blanka, som själv håller på med judo, brukar ofta titta på när hennes kompis spelar fotboll. Vilket av följande påståenden är sant?

a: Tajana spelar volleyboll b: Blanka spelar fotboll

c: Tajana sysslar med judo d: Monica åker slalom

e: Ines spelar volleyboll

(Kroatien)

8 I ett vanligt koordinatsystem markeras följande punkter:

$A = (2006, 2007)$, $B = (2007, 2006)$, $C = (-2006, -2007)$, $D = (2006, -2007)$, $E = (2007, -2006)$

Vilken sträcka är horisontell?

a: AD b: BE c: BC d: CD e: AB

(Spanien)

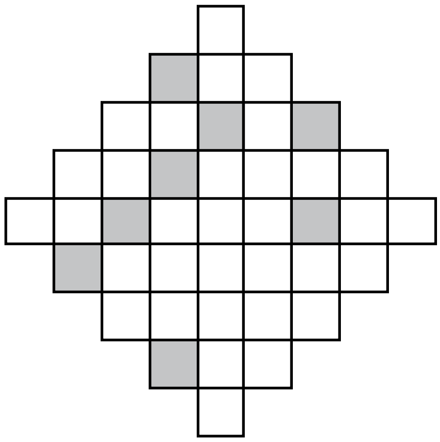
Avdelning 2. Fyrapoängsproblem

9 Ett palindromtal är ett tal som är detsamma om man läser det framifrån eller bakifrån. Ett exempel på palindromtal är 13931. Hur stor är differensen mellan det största sexsiffriga palindromtalet och det minsta femsiffriga palindromtalet?

a: 989989 b: 989998 c: 998998 d: 999898 e: 999988

(Storbritannien)

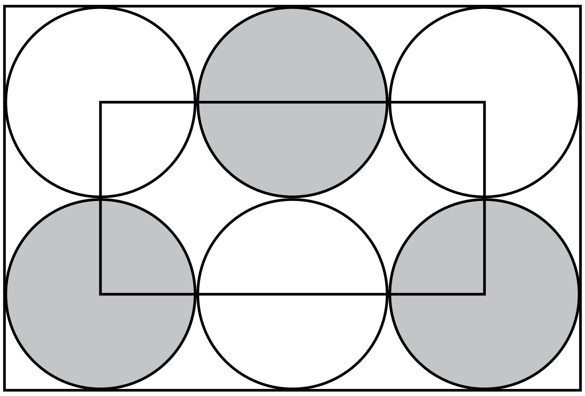
10 Hur många ytterligare rutor måste man minst skugga i figuren för att den ska få en symmetriaxel?



a: 4 b: 6 c: 5
d: 2 e: 3

(Spanien)

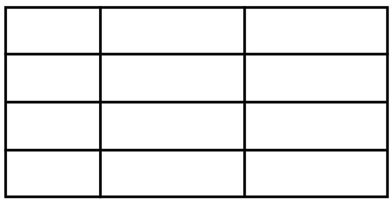
11 Bilden innehåller sex lika stora cirklar som precis får plats i en rektangel. En mindre rektangel har sina hörn i fyra av cirklarnas mittpunkter. Denna mindre rektangel har omkretsen 60 cm. Vilken omkrets har den större rektangeln?



a: 160 cm b: 140 cm
c: 120 cm d: 100 cm e: 80 cm

(Slovakien)

12 Genom att dra 9 linjer (5 vågräta och 4 lodräta) har vi fått ett rutnät med 12 rutor. Med 6 vågräta linjer och 3 lodräta linjer hade vi bara fått 10 rutor. Hur många rutor kan vi maximalt få på detta sätt om vi använder sammanlagt 15 linjer?



a: 22 b: 30 c: 36 d: 40 e: 42

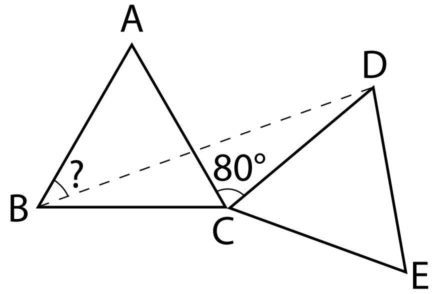
(Nederländerna)

13 På två parallella linjer är sex punkter markerade. På den ena linjen ligger fyra punkter och på den andra linjen ligger två punkter. Hur många trianglar finns det som har sina hörn i tre av de sex punkterna?

a: 6 b: 8 c: 12 d: 16 e: 18

(Kroatien)

14 ABC och CDE är två lika stora liksidiga trianglar. Vinkeln ACD = 80°.
Hur stor är vinkeln ABD?



a: 25° b: 30° c: 35° d: 40° e: 45°

(Storbritannien)

15 En affär gjorde en undersökning av vilka bananer som kunderna köpte. Det visade sig att $\frac{2}{3}$ av bananköparna köpte traditionellt odlade bananer medan $\frac{1}{3}$ köpte ekologiskt odlade bananer. Efter en informationskampanj om ekologisk odling visade en ny undersökning att $\frac{1}{4}$ av de som förut köpte traditionellt odlade bananer nu gått över till att köpa ekologiskt odlade. Vilken är den nya fördelningen?

a: $\frac{5}{12}$ köper traditionella, $\frac{7}{12}$ köper ekologiska

b: $\frac{1}{4}$ köper traditionella, $\frac{3}{4}$ köper ekologiska

c: $\frac{7}{12}$ köper traditionella, $\frac{5}{12}$ köper ekologiska

d: $\frac{1}{2}$ köper traditionella, $\frac{1}{2}$ köper ekologiska

e: $\frac{1}{3}$ köper traditionella, $\frac{2}{3}$ köper ekologiska

(Schweiz)

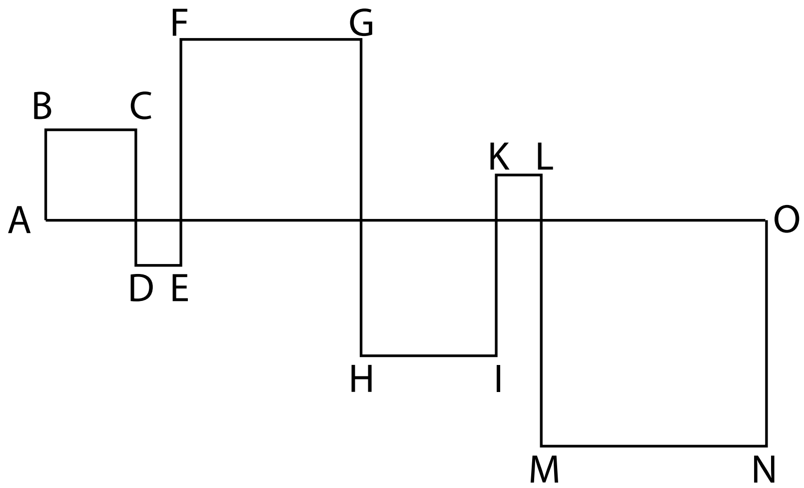
16 Vad ska vi upphöja 4^4 till för att få 8^8?

a: 2 b: 3 c: 4 d: 6 e: 16

(Ryssland)

Avdelning 3. Fempoängsproblem

17 Lajka och hennes husse är på hunduppvisning. Från punkt A till punkt O går en rak bana. Den är 24 m lång. Lajka springer i snön från A till B. Sen springer hon vidare till C, D, E, F osv ända till punkten O. Tillsammans med banan bildar hennes spår kvadrater. Hur långt springer Lajka?



a: 48 m b: 72 m c: 96 m d: 56 m e: 106 m

(Vitryssland)

18 Peter och Nilla suddar ut fyra tal var i kvadraten så att bara ett tal blir kvar. Summan av de tal Peter suddar ut är lika med summan av de tal Nilla suddar ut. Vilket tal blir kvar på brädet?

4	12	8
13	24	14
7	5	23

a: 4 b: 7 c: 14
d: 23 e: 24

(Ukraina)

19 Hur många fyrsiffriga tal finns det som har alla följande fyra egenskaper?

Talets första siffra är lika med antalet nollor i talet;
talets andra siffra är lika med antalet ettor;
talets tredje siffra är lika med antalet tvåor;
talets fjärde siffra är lika med antalet treor i talet.

a: 0 b: 2 c: 3 d: 4 e: 5

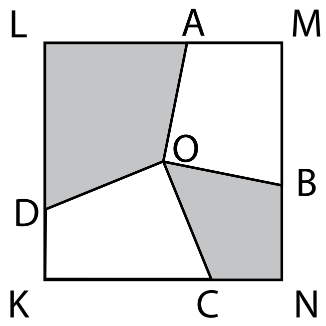
(Ukraina)

20 Talen 1, 4, 9, 16, 25 etc kallas jämna kvadrater. Hur många procent av de tio tusen första positiva heltalen 1, 2, 3, ... , 9999, 10000 är jämna kvadrater?

a: 1% b: 1,5% c: 2% d: 2,5% e: 5%

(Nederländerna)

21 Mittpunkten i kvadraten KLMN är punkten O. Vinklarna AOB och COD är båda räta. Kvadratens sidlängd är 2 cm. Vilken area har den skuggade delen?



a: 1 cm^2 b: 2 cm^2

c: 2,5 cm^2 d: 2,25 cm^2

e: det beror på hur man väljer punkterna B och C

(Vitryssland)

22 Fem positiva heltal skrivs upp runt en cirkel. De ska skrivas så att två eller tre intilliggande tal aldrig ger en summa som är delbar med tre. Hur många av de fem talen är själva delbara med tre?

a: 0 b: 1 c: 2

d: 3 e: det går inte att avgöra

(Ryssland)

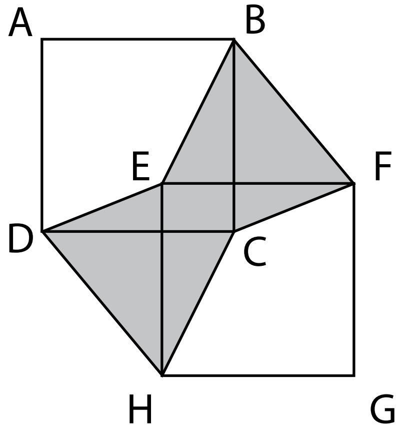
23 Madame Dupont tar en 2 timmars promenad. Först går hon en sträcka på plan mark, därefter går hon uppför en backe. Sedan vänder hon och går tillbaka samma väg hem igen. Hennes hastighet är 4 km/h på plan mark, 3 km/h i uppförsbacken och 6 km/h nedför backen. Hur lång sträcka går Madame Dupont sammanlagt?

a: det går inte att avgöra b: 6 km c: 7,5 km

d: 8 km e: 10 km

(Frankrike)

24 ABCD och EFGH är två lika stora kvadrater. AB är parallell med EF. Det skuggade området har arean 1. Vilken area har kvadraten ABCD?

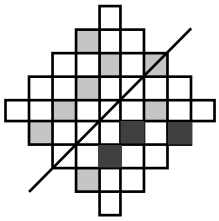


a: 1 b: 2 c: $\frac{1}{2}$ d: $\frac{3}{2}$

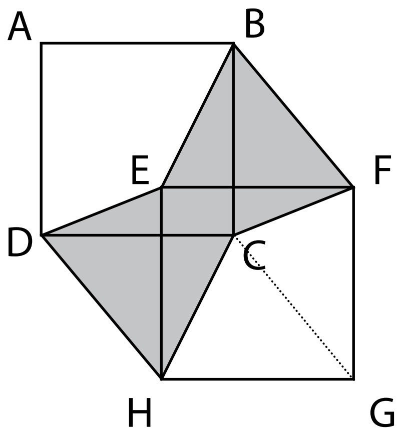
e: det beror på hur man placerar kvadraterna

(Mexiko)

Kortfattade lösningar med svar till Cadet för gymnasiet 2007

1 c	223	2007/9 = 223
2 a	2 jan 2003	Irina föds 1 år och 1 dag efter Boris, dvs 2 januari 2003.
3 d	D1	Roboten kommer att röra sig: A2 – B2– B1 – A1 – A4 – D4 – D1
4 d	27	Den sammanlagda ögonsumman på en tärning är $3 \cdot 7 = 21$, på två tärningar 42. Dolda ögon är $42 - 15 = 27$.
5 a	22	Mellan första och sista busken är det $20/2 = 10$ avstånd på 2 m. 11 rosenbuskar ska planetras på varje sida, totalt 22.
6 c	34	De fyra trianglarna är kongruenta och deras sammanlagda area är 30. Den större kvadraten har sidan 8 och arean 64, den mindre har arean $64 - 30 = 34$.
7 e		Från texten vet vi att Blanka håller på med judo och att Tajana alltså åker slalom. Det ger att påstående *a*–*d* är osanna.
8 d	CD	Sträckan CD är horisontell eftersom C och D har samma *y*-koordinat.
9 b	989 998	Störst sexsiffrigt palindromtal är 999 999, minst femsiffrigt är 10 001.
10 e	3	
11 d	100 cm	Den mindre rektangelns omkrets är $6 \cdot d$, där d är cirkelns diameter, som alltså är 10 cm. Den större rektangelns omkrets är $10 \cdot d$, dvs 100 cm.
12 e	42	Vi behöver 4 linjer för att göra en ruta. Låter vi de övriga 11 linjerna vara lodräta får vi 12 rutor. Ändrar vi riktning på en linje får vi $11 \cdot 2 = 22$ rutor, för varje ytterligare ändring får vi $10 \cdot 3 = 30$, $9 \cdot 4 = 36$, $8 \cdot 5 = 40$ till $7 \cdot 6 = 42$ rutor.
13 d	16	Om ett hörn ligger på linjen med två punkter kan det hörnet väljas på 2 sätt. De andra två hörnen kan då väljas på $4 \cdot 3/2$ sätt= 6 sätt. Multiplikationsprincipen ger $6 \cdot 2$ trianglar = 12 trianglar. Om två hörn ligger på linjen med två punkter kan det tredje hörnet väljas på 4 sätt, därmed 4 trianglar. Det ger sammanlagt 16 trianglar.
14 d	40°	$\angle BCD = 80° + 60° = 140°$. Triangeln BCD är likbent. Då är $\angle DBC = \angle BDC = (180° - 140°)/2 = 20°$ och $\angle ABD = 60° - 20° = 40°$.
15 d	1/2, 1/2	Efter reklamkampanjen köper $3/4 \cdot 2/3 = 1/2$ av konsumenterna traditionellt odlade bananer.
16 b	3	$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24} = (2^2)^{12} = 4^{12} = (4^4)^3$
17 b	72 m	Lajka springer utefter tre sidor i varje kvadrat och alltså en sträcka som är tre gånger längre än AO.
18 a, c, e	4, 14, 24	På grund av ett misstag vid uppgiftskonstruktionen så ska tre alternativ bedömas som korrekta. *a* är rätt. Ex: Peter kan sudda 5, 12, 13 & 23 och Nilla 7, 8, 14 & 24, summa 53. *c* är rätt. Ex: Peter kan sudda 5, 7, 12 & 24 och Nilla 4, 8, 13 & 23, summa 48. *e* är rätt. Ex: Peter kan sudda 5, 7, 8 & 23, och Nilla 4, 12, 13 & 14, summa 43. *b)* 7 och *d)* 23 kan inte vara korrekta, eftersom summan av alla nio talen är 110 och med ett udda tal kvar så kan inte åtta suddade tal delas så att Peter och Nilla får samma summa.

19 b	2	1210 och 2020 är de två tal som uppfyller villkoren.
20 a	1%	$10\,000 = 100^2$, innebär att det finns 100 jämna kvadrater bland de 10 000 första talen. De utgör 100/10 000 = 1%.
21 b	2 cm^2	Kvadratens area är 4 cm^2. Den skuggade delen är 50 % av 4, dvs 2 cm^2.
22 c	2	Om inget av talen skulle vara delbart med 3 (alternativ *a*), vore resterna vid division med 3 antingen 1 eller 2 och summan av två eller tre intilliggande tal delbar med 3. Om de har samma rest är tre tal intill varandra delbara med 3, har de olika rest räcker det med 2. Om tre eller fler av talen vore delbara med 3 (alternativ *d*) skulle två av dem hamna invid varandra och summan bli delbar med 3. Om bara ett av talen är delbart med 3 (alternativ *b*) är resterna för fyra tal intill varandra 1 eller 2. Om de har samma rest är tre tal intill varandra delbara med 3, har de olika rest räcker det med 2.
23 d	8 km	Om längden på backen är b km använder Madame Dupont tiden $(b/3)$ h att gå upp och $(b/6)$ h att gå ned för backen. Sammanlagda tiden att gå sträckan $2b$ är då $(b/3) + (b/6)$ h = $(3b/6)$ h = $(b/2)$ h, som också kan skrivas $(2b/4)$ h. Det betyder att hon har samma medelfart i backen som på plan mark och att sträckan blir 8 km.
24 a	1	Vi kan tänka oss att vi flyttar in de skuggade trianglarna DEH och EBF i kvadraten EFGH. Eftersom triangeln DEH är kongruent med triangeln CFG och triangeln EBF är kongruent med triangeln HCG, så är kvadratens area lika stor som det skuggade områdets.



Arbeta vidare och utveckla problemidéerna i Cadet för gymnasiet 2007

Det finns fullt av intressanta idéer i årets Känguruaktiviteter och vi vet att problemen kan inspirera undervisningen under många lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt, komma fram till lösningar, sedan jämföra. De kan formulera aktiviteter eller exempel med anknytning till frågor som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över problem. Att se olikheter mellan problem, att se det som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av matematiken. Stimulera och utmana dina elever genom att också pröva Känguruuppgifter för äldre elever, Junior och Student.

Flera av exemplen har anknytning till uppgifter från tidigare omgångar. Vi visar på några sådana, men det finns fler och även möjligheter att gå vidare till andra Känguruklassers problemsamlingar med svar och lösningar samt förslag att arbeta vidare. Alla tidigare problem, sedan starten i Sverige, finns att hämta på *Kängurusidan* på ncm.gu.se/kanguru. Det finns mycket annat att göra än det vi tar upp här. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1
Ett överslag räcker. Diskutera olika strategier.
– Vilka fler delare har 2007?
– Primtalsfaktorisera 2007.

Ett tal är delbart med 9 om talet har siffersumman 9. Diskutera andra delbarhetsregler.

2
– När är Irina född om Boris istället är 1 år och 1 dag yngre än Irina? När är Irina född om hon är 1 år och 1 dag yngre än Boris.
– Vilken dag är man född om man kan säga: ”Nästa år blir jag tre år äldre än jag var i förrgår.”?

3 Rita robotens bana.

4
– Vilken sammanlagd ögon summa har en tärning? Vad vet man om summan av antal ögon på två motstående sidor? Går det att entydigt bestämma antal ögon på de sidor man inte ser?

Veckla ut tärningarna och fyll i antal ögon.

Mer om tärningar se t ex Uppsalget: Rika tärningar i Nämnaren nr 4, 2003. Finns under rubriken ArkivN på namnaren.ncm.gu.se.

5
Diskutera hur många buskar det blir på vardera sida om vägen. Rita en figur och markera buskarna.

Ett liknande problem är Ecolier 4, 2007.

6
Vad menas med kongruenta trianglar? Diskutera andra sätt att bestämma den lilla kvadratens area, t ex med hjälp av Pythagoras sats.

Se även Cadet 21, 2007.

7
– Vilka idrotter sysslar var och en av flickorna med?

Liknande problem var t ex GyCadet 19, 2006, GyCadet 19, 2005

8
– Markera punkterna i ett koordinatsystem. Vad gäller för punkter på sträckan AB, BC, BE, AD?
Ta upp begreppen funktion, avstånd mellan punkter, mittpunkt på en sträcka.
– Bestäm omkretsen och arean av fyrhörningen ABED. Vad kallas en sådan fyrhörning?
– Markera samtliga trianglar som kan bildas med punkterna som hörn. Bestäm deras omkrets och area.
Be eleverna säga något om trianglarnas vinklar?

9
Ändra frågeställning. Jämför t ex minsta sexsiffriga palindromtalet och största femsiffriga.

10
– Vad menas med symmetri? Hur många symmetriaxlar kan konstrueras?
Kopiera figuren och låt eleverna färglägga så att det bildas symmetriaxlar.

Ett liknande problem var Benjamin 11, 2004

11
– Hur stor del av rektangeln är täckt av cirklar?

Se även GyCadet 10, 2006, GyCadet 14, 2006, GyCadet 14, 2005.

12
– Vilket är det minsta antal linjer som behövs för att man ska få en ruta?
– Hur ska man fortsätta att dra linjer för att få maximalt antal rutor?

13
– Rita linjerna och konstruera trianglarna. Vilken betydelse har punkternas läge? Vilka typer av trianglar kan konstrueras?
Diskutera villkoren för att tre sträckor ger en triangel.
– Hur många fyrhörningar finns det som har sina hörn i fyra av de sex punkterna?

14
Repetera begreppen liksidig och likbent triangel.
– Dra sträckan AD. Hur stor är vinkeln BAD, vinkeln BDA?

Liknande problem: GyCadet 16, 2005 och GyCadet 16, 2004.

15
Diskutera och jämför olika sätt att beräkna hur många kunder som köper traditionellt odlade bananer efter reklamkampanjen.
– Hur många måste påverkas av kampanjen för att de övriga svarsalternativen ska vara riktiga?

Se även Junior 6, 2007.

16
Repetera potenslagarna. Låt eleverna skriva om de två talen i samma bas, t ex 2 eller 4.

Mer om potenser se Junior 21, 2007. Problem med potenser har funnits tidigare, t ex Student 1 och Student 5, 2005, Student 8, 2006.

17
– Har antalet kvadrater som Lajkas spår bildar betydelse för hur långt Lajka springer?
Låt eleverna dela in banan i fler eller färre kvadrater och undersöka hur långt Lajka springer.

18
Jämför de olika lösningarna. Vilken är summan av de fyra tal som Per och Nilla suddar ut?
– Finns det fler lösningar om man bortser från de angivna svarsalternativen?
– Vilket tal återstår om summan av de tal Per suddar ut ska vara tre gånger så stor som summan av de tal Nilla suddar ut?

19
– Vilka siffror kan ingå i de fyrsiffriga tal med de angivna egenskaperna. Bestäm de talen.

20
– Bestäm hur många kvadrater det finns bland de tio tusen första positiva heltalen.
– Hur många procent av de hundra första positiva heltalen är jämna kvadrater?
– Hur många procent av de tusen första talen är kubiktal?
Arbeta med tiopotenser.

Ett tidigare problem med kubiktal var Student 4, 2005.

21
Dela ut figuren till eleverna. Låt eleverna från mittpunkten rita vinkelräta linjer till respektive sida. Resonera om de uppkomna trianglarna. Vilka är kongruenta och varför?

22
– Vad menas med att ett tal är delbart med 3?
Diskutera rester vid division med 3.
Diskutera olika lösningsmetoder. T ex: Börja med att placera ut två tal runt cirkeln. Vilka kan talen vara för att villkoren ska vara uppfyllda? Fortsätt att resonera till alla fem tal är utplacerade.

Studera den här lösningen: Sätt ut de fem talen a, b, c, d och e i ordning runt cirkeln. Låt a, b, c, d och e vara de fem talen. Om ett tal divideras med 3 kan resten bli 0, 1 eller 2. Det räcker med att titta på talens rester r. Anta att inget tal har resten 0. Då måste två tal som står bredvid varandra ha samma rest, dvs $r=1$ eller $r=2$. Men då kommer summan av tre tal som står bredvid varandra vara delbar med 3. Alltså måste minst ett tal ha resten 0.

Anta att talet a har resten 0. Då måste b eller e ha resten 1 eller 2. Vidare måste talen b och e ha samma rest, annars blir restsumman för $a+b+e$ delbar med 3. Talet c kan ha rest 0 eller samma rest som b. Samma sak gäller talet d. Men talen c, d och e kan inte ha samma rest för då blir deras summa delbar med 3. Vidare kan inte både c och d ha resten 0, för då blir deras summa delbar med 3. Alltså måste ett av talen c och d ha resten 0, dvs två av de fem talen är delbara med 3.

– Hur blir det om vi har fler tal runt cirkeln? 6, 7, 8, osv. Vilka generella slutsatser kan vi dra?

23
Diskutera olika sätt att lösa problemet.
– Vilket är förhållandet mellan den tid det tar att gå de olika delsträckorna? Hur lång tid tar varje sträcka och hur långa är de?

Liknande problem var GyCadet 24, 2006 och GyCadet 22, 2004.

24
– Vad händer om man skjuter isär kvadraterna så att de möts i ett hörn? Vilken yta är då skuggad? Hur stor är dess area?