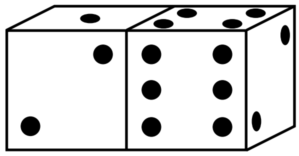
Avdelning 1. Trepoängsproblem

1. Hur många tärningsögon finns det sammanlagt på de sidor som du inte kan se på bilden?



A) 15 B) 12 C) 7 D) 27 E) Inget av dessa svar

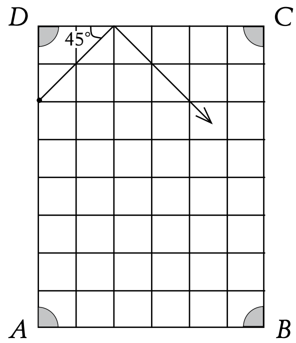
(Bulgarien)

2. Anh, Ben och Chen har sammanlagt 30 bollar. Om Ben ger 5 bollar till Chen, Chen ger 4 till Anh och Anh ger 2 till Ben, så kommer de alla att ha lika många bollar. Hur många bollar har Anh från början?

A) 8 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

(Ungern)

3. Biljardbollen studsar mot sidvallen under vinkeln 45° som figuren visar. I vilket hål kommer den att falla?



A) A B) B C) C D) D E) inget av hålen

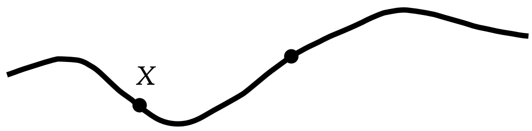
(Bulgarien)

4. Om x är ett heltal mindre än noll, vilket av följande tal är då störst?

A) $x + 1$ B) $2x$ C) $-2x$ D) $6x + 2$ E) $x - 2$

(Frankrike)

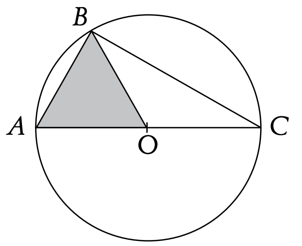
5. Det anses att redan byggmästarna i det antika Egypten använde sig av rep med två knutar för att konstruera räta vinklar. (Det vill säga att de tre repdelarna mellan knutarna blev sidor i en rätvinklig triangel.) Om repets längd är 12 m och den första knuten X är 3 m från repets ena ände, hur långt från den andra repänden ska den andra knuten vara för att man ska få en rät vinkel vid X?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) inget av svaren

(Bulgarien)

6. Den skuggade arean är $\sqrt{3}$. Vilken area har triangeln ABC ?



A) $2\sqrt{3}$ B) 2 C) 5 D) 4 E) $4\sqrt{3}$

(Mexiko)

7. Vad ska vi upphöja 4^4 till för att få 8^8 ?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 16

(Ryssland)

8. För att klara ett inträdesprov till universitetet måste man svara rätt på minst 80 % av frågorna. Peter har nu gått igenom de 15 första frågorna. Han svarade inte på 5 av dessa frågor, men han är säker på att han svarat rätt på de övriga 10 frågorna. Om han svarar rätt på alla återstående frågor kommer han att klara provet med precis 80 % rätt. Hur många frågor omfattar provet?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

(Slovakien)

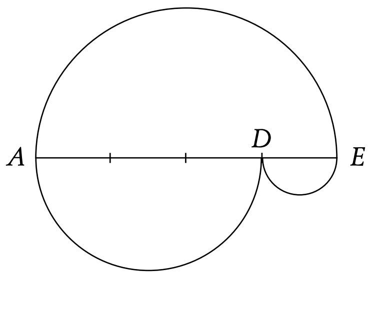
Avdelning 2. Fyrapoängsproblem

9 Fem positiva heltal skrivs upp runt en cirkel. De ska skrivas så att två eller tre intilliggande tal aldrig ger en summa som är delbar med tre. Hur många av de fem talen är själva delbara med tre?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) går inte att avgöra

(Ryssland)

10. Sträckan AE har delats in i fyra lika delar och man har ritat halvcirklar med AE, AD och DE som diametrar. På så vis har man två vägar från A till E: en övre bestående av en halvcirkel och en nedre bestående av två halvcirklar. Hur förhåller sig längden av den övre vägen till längden av den nedre vägen?



A) 1 : 2 B) 2 : 3 C) 2 : 1

D) 3 : 2 E) 1 : 1

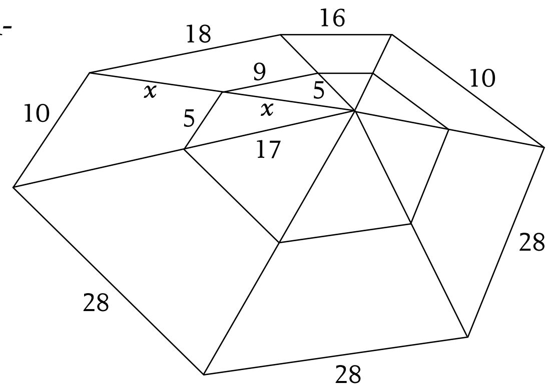
(Spanien)

11. Ann, Belinda och Charles kastar tärning. Ann vinner om hon får 1, 2 eller 3; Belinda vinner om hon får 4 eller 5; Charles vinner om han får 6. Ann kastar först, därefter Belinda, sedan Charles. Beräkna sannolikheten för att någon vinner.

A) 0 B) 5/18 C) 13/18 D) 1 E) omöjligt att avgöra

(Spanien)

12. En matteintresserad spindel har spunnit ett spindelnät som figuren visar. En del av trådlängderna är markerade. Även x står för ett heltal. Vilket?



A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

(Spanien)

13. Man startar med en kvadrat *ABCD* med sidlängd 1. Sedan ritar man ut alla kvadrater som har två hörn gemensamt med kvadraten *ABCD*. Hur stor area har området som täcks av (minst en av) dessa kvadrater?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

(Österrike)

14. Vinkeln β är 25 % mindre än vinkeln γ och 50 % större än vinkeln α. Vinkeln γ är alltså

A) 25 % större än α

B) 50 % större än α

C) 75 % större än α

D) 100 % större än α

E) 125 % större än α

(Vitryssland)

15. $\dfrac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ}$ är lika med?

A) 0 B) $\tan 1^\circ$ C) $\cot 1^\circ$ D) 1/89 E) 1

(Polen)

16. Om x och y är heltal sådana att $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, vilket värde måste x då ha?

A) 0 B) 3 C) −1 D) 1 E) 2

(Spanien)

Avdelning 3. Fempoängsproblem

17. Summan av fem på varandra följande heltal är lika med summan av de tre närmast efterföljande heltalen. Vilket är det största av dessa åtta tal?

A) 4 B) 8 C) 9 D 11 E) något annat

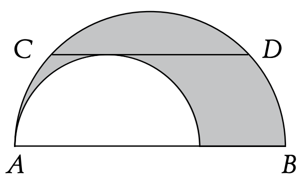
(Ukraina)

18. Tova föddes den dag hennes mamma fyllde 20 år, så de har samma födelsedag. Hur många gånger kommer Tovas ålder att vara en delare (heltal ≥ 1) till hennes mammas ålder, om de båda får leva riktigt länge?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(Österrike)

19. Två halvcirklar är uppritade i figuren. Kordan CD, som har längd 4, är parallell med den stora halvcirkelns diameter AB och tangerar den mindre halvcirkeln. Hur stor area har det skuggade området?



A) π B) $1{,}5\pi$ C) 2π D) 3π

E) inte tillräcklig information

(Vitryssland)

20. Befolkningen på en ö bestod av lögnare och sanningssägare. (Lögnarna ljög alltid och sanningssägarna talade alltid sanning.) En dag träffades två öbor A och B, och A sa att minst en av de båda var en lögnare. Vilket av följande påståenden är sant?

A) A kan inte säga så

B) båda är lögnare.

C) båda är sanningssägare

D) A är lögnare och B är sanningssägare

E) B är lögnare och A är sanningssägare

(Vitryssland)

---

21. Vilket av följande tal kan inte skrivas $x + \sqrt{x}$ för något heltal x?

A) 870 B) 110 C) 90 D) 60 E) 30

(Ungern)

---

22. Om $f(x) = \dfrac{2x}{3x + 4}$ och $f(g(x)) = x$, vad är då $g(x)$?

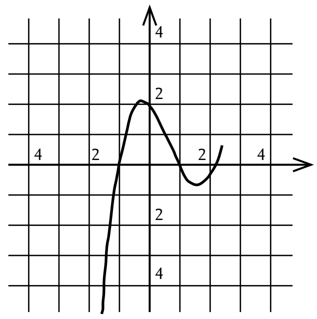
A) $g(x) = \dfrac{3x + 4}{2x}$ B) $g(x) = \dfrac{3x}{2x + 4}$ C) $g(x) = \dfrac{2x + 4}{4x}$

D) $g(x) = \dfrac{4x}{2 - 3x}$ E) inget av dessa

(Ungern)

---

23. I diagrammet visas en del av grafen till funktionen
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Vilket värde har b?



A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

(Spanien)

---

24 För hur många reella tal a har ekvationen $x^2 + ax + 2007 = 0$ två heltalslösningar?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) annat svar

(Tjeckien)

Kortfattade lösningar med svar till Student 2007

3 poäng

1. (D) Den sammanlagda ögonsumman på en tärning är $3 \cdot 7 = 21$. Två tärningar har då summan 42. Vi ser $6 + 2 + 4 + 2 + 1 = 15$ ögon. Dold ögonsumma är $42 – 15 = 27$. Ett alternativt är att gå direkt på vad som inte syns: vänster tärning: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$, höger tärning: $1 + 3 + 5 = 9$, $18 + 9 = 27$

2. (A) Pojkarna kommer att till sist ha 10 bollar var. A + 4 – 2 = 10, A = 8 eller man kan tänka baklänges utifrån vad Anh hade till sist: $10 + 2 – 4 = 8$

3. (C) Det är bara att följa kvadraternas diagonaler, eftersom vinkeln är 45 grader.

4. (C) Det enda tal som är större än 0 är $– 2x$.

5. (C) 3, 4 och 5 bildar en Pythagorisk trippel.

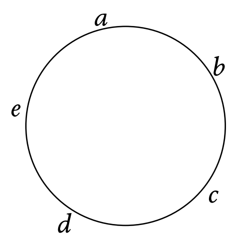
6. (A) Höjden i triangeln ABC är lika lång som i triangeln ABO.
Basen är dubbelt så lång.

7. (B) $8^8 = (2^3)^8 = ((2^2)^4)^3 = (4^4)^3$
Alternativt: $8 = 4 \cdot 2 = 4 \cdot \sqrt{4} = 4^{1,5}$, $8^8 = (4^{1,5})^8 = (4^4)^3$

8. (B) Anta att det var sammanlagt var x frågor. $\frac{x-5}{x} = 0,80$.
Det spelar inte någon roll att Peter svarat rätt på 10 frågor redan.

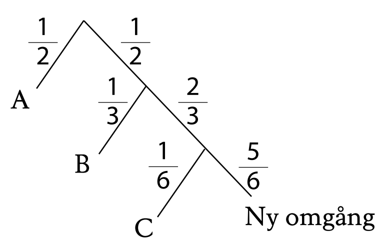
4 poäng

9. (C) Låt a, b, c, d och e vara de fem talen runt cirkeln. Om ett tal divideras med 3 kan resten bli 0, 1 eller 2. Det räcker med att titta på talens rester r. Anta att inget tal har resten 0. Då måste två tal som står bredvid varandra ha samma rest, dvs $r = 1$ eller $r = 2$. Men då kommer summan av tre som står bredvid varandra vara delbar med 3. Alltså måste minst ett tal ha resten 0. Anta att talet a har resten 0. Då måste b eller e ha resten 1 eller 2. Vidare måste talen b och e har samma rest, annars blir restsumman för $a + b + e$ delbar med 3. Talet c kan ha rest 0 eller samma rest som b. Samma sak gäller talet d. Men talen c, d och e kan inte ha samma rest för då blir deras summa delbar med 3. Vidare kan inte både c och d ha resten 0, för då blir deras summa delbar med 3. Alltså måste ett av talen c och d ha resten 0, dvs. två av de fem talen är delbara med 3.

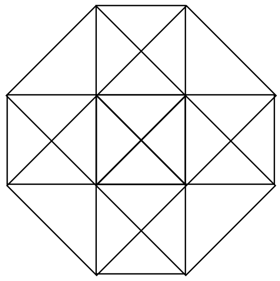


10. (E) Anta att AE = $2r$. Då har bågen AE längden πr. Bågen AD längden $\frac{3}{4} \cdot$ AE och bågen DE längden $\frac{1}{4} \cdot$ AE.

11. (C) En omgång kan resultera i fyra händelser vilket illustreras i träddiagrammet.



12. (B) Betrakta trianglarna med sidorna 5, x, 17 och 5, 9, x. Triangelolikheten (summan av två sidor i en triangel är större än den tredje sidan) ger $5 + x > 17$ och $5 + 9 > x$. D v s $12 < x < 14$.



13. (C) Konstruera fyra nya kvadrater utefter den ursprungliga kvadratens sidor och fyra utefter dess diagonaler.

14. (D) $\beta = 0{,}75\,\gamma$, $\beta = 1{,}5\,\alpha$ ger $0{,}75\,\gamma = 1{,}5\,\alpha$

15. (E) $\sin v = \cos(90° - v)$

16 (B) $\mathrm{VL} = 2^{x+1} + 2^x = 2^x(2+1) = 2^x \cdot 3$
$\mathrm{HL} = 3^{y+2} - 3^y = 3^y(3^2 - 1) = 2^3 \cdot 3^y$
Jämförelse av exponenterna ger $x = 3$.

5 poäng

17. (D) Låt x vara det minsta talet, då gäller
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = x + 5 + x + 6 + x + 7$

18. (C) Låt n vara Tovas ålder. Då gäller $\frac{20+n}{n} = \frac{20}{n} + 1$. Det ger att n måste vara en delare till 20. De positiva delarna till 20 är 1, 2, 4, 5, 10 och 20.

19. (C) Låt den lilla cirkeln ha radien r och den stora cirkeln radien R.
Då gäller $r^2 + 2^2 = R^2$. Det skuggade områdets area är
$\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = 2\pi$

20. (E) Om A är sanningssägare så är B lögnare.
Om A är lögnare så är påståendet falskt.

21. (D) Sätt $\sqrt{x} = t$. Det ger $t^2 + t$: $870 = 29^2 + 29$, $110 = 10^2 + 10$, $90 = 9^2 + 9$, $30 = 5^2 + 5$
Alternativ: Skriv $x + \sqrt{x} = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)$
Detta innebär att talen måste kunna skrivas som produkten av två konsekutiva tal. Det ena talet måste dessutom sluta på 5 eller 0, om man ser till svarsalternativen.

22. (D) Sätt $g(x) = y$. Då gäller $f(y) = \frac{2y}{3y+4} = x$.

23. (B) $f(-1) = -a + b - c + d = 0$
$f(1) = a + b + c + d = 0$

Ledvis addition ger $b = -d$. $f(0) = d = 2$

24. (C) För två lösningar x_1 och x_2 till en andragradsekvation gäller att $a = -(x_1 + x_2)$ och $x_1 x_2 = 2007$. Faktorisering av 2007 ger
$2007 = \pm 1 \cdot (\pm 2007) = \pm 3 \cdot (\pm 669) = \pm 9 \cdot (\pm 223)$

Arbeta vidare med Student 2007

Det är vår förhoppning att du ska finna många intressanta uppslag bland årets Känguruproblem och att denna problemsamling ska kunna inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag till arbeten.

Många av känguruproblemen kan lösas med olika metoder t ex laborativa eller genom att man ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt och på så sätt komma fram till olika lösningsvarianter att jämföra och se vilken de finner enklast. De kan också formulera egna aktiviteter eller problem med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över exemplen. Att jämföra problemen och göra kopplingar inom och utom matematik är en utvecklingsmöjlighet. Att kunna se likheter mellan olika problem, att kunna se vad som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av problemlösning. Flera av problemen har anknytning till problem som varit med i tidigare omgångar. Vi visar på några sådan kopplingar, men det finns fler och också i andra tävlingsklasser. Alla tidigare problem finns att hämta på *Kängurusidan* på ncm.gu.se/kanguru.

Det finns naturligtvis mycket annat man kan göra. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 Vad vet vi om summan av antalet ögon på två motstående sidor? Vilken sammanlagd ögonsumma har en tärning? Går det att entydigt bestämma antalet ögon på de sidor man inte ser? Veckla ut tärningarna och fyll i antalet ögon. Mer om tärningar se t ex Nämnaren nr 4, 2003, Rika tärningar. Om du arbetar laborativt med tärningar kan du försöka maximera (eller minimera) summan av antalet ögon som inte döljs av någon annan tärning. Utgå gärna från fyra tärningar och öka sedan på för att få nya problem att lösa.

2 Hur många bollar kommer var och en ha när de har delat lika? Hur många bollar har Ben och Chen från början? Ett liknande problem är Benjamin 15, 2007. Variera problemet genom att utgå från ett annat antal bollar, eller att de som slutresultat inte har lika många.

3 Låt eleverna rita bollbanan. Vilken längd i cm har bollbanan om sträckan CD är fem fot? Kan bollen nå något av hålen om den uppmätta vinkeln hade haft en annan storlek?

4 Vilka är de negativa heltalen? Vilket är största värdet på $x + 1$, $2x$, $-2x$, $6x + 2$, $x - 2$? Ordna svarsalternativen i storleksordning, börja med det minsta.
För vilka x gäller $2x < x + 1$, $6x + 2 < x - 2$, $2x < x - 2$?

5 Repetera Pythagoras sats. Vad menas med en Pythagoreisk trippel? Be eleverna ge exempel. En trippel där de tre talen inte har en gemensam faktor kallas ”äkta”. Hypotenusan för en sådan trippel kan alltid uttryckas som summan av två tals kvadrater. Hur kan kateterna uttryckas med hjälp av samma två tal? Uttryck även detta algebraiskt och visa att Pythagoras sats alltid gäller för sådana tripplar.

6 Diskutera andra sätt att bestämma triangelns area. Hur stor är vinkeln ABC? Bestäm vinkeln AOB för olika värden på radien r. Vilken omkrets har triangeln ABC om triangeln ABO har omkretsen $3r$?

7 Repetera potenslagarna. Låt eleverna skriva om de två talen i samma bas, t ex 2 eller 4.
Mer om potenser se Junior 21, 2007. Problem med potenser har funnits tidigare, se Student 1 och 5, 2005 och Student 8, 2006. Finns det någon standardmetod för att lösa denna typ av problem för alla typer av potenser?

8 Diskutera med eleverna hur man kan lösa problemet. Hur många procent rätt hade Peter på de första 15 frågorna? Låt eleverna argumentera för att det inte spelar någon roll hur många rätt Peter hade efter 15 frågor. Är alla svarsalternativen möjliga om man ändrar det totala antalet frågor för varje alternativ?

9 Vad menas med att ett tal är delbart med 3? Diskutera rester vid division med 3. Börja med att placera ut ett tal runt cirkeln. Vilka kan de närliggande talen vara för att villkoren ska vara uppfyllda? Fortsätt att resonera tills fem tal är utplacerade. Hur kan man visa med algebra att summan av två tal, som har resterna 1 respektive 2 vid division med 3, är delbara med 3? Gör motsvarande för summan av tre tal.

10 Hur stor area begränsar de tre halvcirklarna? Stämmer svaret 1 : 1 oberoende av hur många delar sträckan AE delas in i?

11 Diskutera vilka möjliga utfall som finns. Vad händer om man upprepar proceduren tills någon vinner? Hur stor är i så fall sannolikheten för att Charles vinner? Ta upp begreppet betingad sannolikhet. Ett annat problem med sannolikhet är Junior 24, 2007.

12 Hur skulle man kunna svara om x i uppgiften inte är ett heltal? Diskutera de allmänna villkor som gäller för en triangel. Se t ex CadetGy 9, 2006. Visa att triangelolikheten gäller även för vektorer, och hur olikheten då bör uttryckas.

13 Låt eleverna rita upp kvadraterna och markera området som täcks av kvadraterna. Vilken omkrets har området? Hur stora är de areor som täcks av en, två, tre respektive fyra kvadrater?

14 Hur många procent mindre är vinkeln α än vinkeln γ? Låt α, β och γ vara vinklarna i en triangel. Bestäm α, β och γ.

15 Arbeta med trigonometriska samband.
Vilket värde har summan $\cos 1° + \cos 2° + ... + \cos 358° + \cos 359°$?

16 Vilket värde måste y ha? Hur kommer det sig att problemet går att lösa trots att vi har två obekanta men bara en ekvation? Diskutera begreppet diofantisk ekvation samt ge några exempel.

17 Diskutera lösningsmetoder med eleverna. Hur skulle ekvationen sett ut om vi satt det största talet som x? Går problemet att lösa utan ekvation?
Ett liknande problem var Benjamin 16, 2005.

18 Ta upp begreppet delare. Vad menas med delare? Vilka delare har ett primtal? Hur många delare har ett tal som är produkten av tre primtal? Mer om delare se även Junior 23, 2007.

19 Vilket samband finns mellan stora cirkelns radie och den lilla cirkelns radie? Uttryck det skuggade områdets area om kordan CD har längden a. Ett liknande problem var Junior 24, 2004.

20 Diskutera med eleverna vad A:s påstående egentligen betyder. Se även Junior 10, 2007.
Vad betyder påståendet ”Jag ljuger alltid”?

21 Låt eleverna skriva svarsalternativen på formen $x + \sqrt{x}$. De skulle också kunna lösa ekvationen $x + \sqrt{x} = a$, där a är de olika svarsalternativen.
Vilka heltal mindre än 100 kan skrivas så att villkoret uppfylls?

22 Ta upp begreppet sammansatt funktion. Låt eleverna söka $f(g(x))$ för de olika svarsalternativen. Ge exempel på ekvationer där $f(g(x)) = g(f(x))$.

23 Låt eleverna beskriva den avbildade funktionen. Låt eleverna försöka bestämma a, b, c och d.
Vilket samband måste finnas mellan funktionens nollställen och värdet på d?

24 Hur ska man resonera om man använder pq-formeln?
Ett liknande problem var Student 23, 2006.