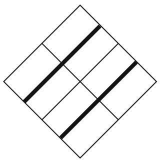
Svar och lösningar

1 D 

Linjerna på de plattorna går inte diagonalt.

2 E 

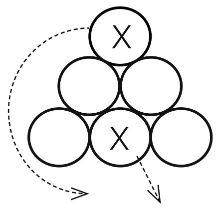
Båda djuren kommer ut, men vägarna möts inte.

3 C: 1 och 3

4 C: David

5 B: 2

Flytta myntet på toppen och myntet som ligger i mitten i bottenraden triangeln.



6 C: 12.10

7 C

			69	
	72			

Resonera om varför de andra inte stämmer, för att uppmärksamma eleverna på hur talen är ordnade.

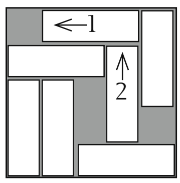
8 E: Mira, Fredrik, Julia, Viktor

9 D: 54

Han har nu skor på 86 fötter. 16 par räcker till 32 fötter.

10 B: 2

Flytta kloss 1 åt vänster och kloss 2 uppåt:



11 B: 2, 4, 6, 8

12 A: 99

I nedre raden är summan av de första tio talen $10 \cdot 10 = 100$ större än summan i övre raden. Sista talet måste alltså vara 100 mindre än sista talet i den övre raden för att summorna ska vara lika.
Gör eleverna uppmärksamma på att det är enklare att se på detta än att addera talen och räkna ut skillnaden.

13 B: 14

För att nå våning 8 har Martin gått 6 våningar. Alltså bor han på våning 2 och Klara på våning 14. Eller, från våning 8 är det ytterligare 6 våningar kvar.

14 E: 30

Byt stegvis ut 10 bilar mot 6 bussar: 40 bilar + 6 bussar = 46 fordon
30 bilar + 12 bussar = 42 fordon.
Kontrollera att det går på fem turer, eller, att talet 42 kan delas upp i fem termer som ska vara 10 och 6 (eller 5 och 3, dvs de antal vi kan räkna med. Delar av bilar och bussar är inte tänkbart). $10 + 10 + 10 + 6 + 6 = 42$.

15 C: 3

För två år sen var Tore 11 år och Tommy alltså 4 år. Nu är Tommy 6 år och om 3 år är han 9.

16 D: sekunder på en vecka

Uppmärksamma eleverna på att de inte behöver utföra beräkningen.

17 D: Berlin

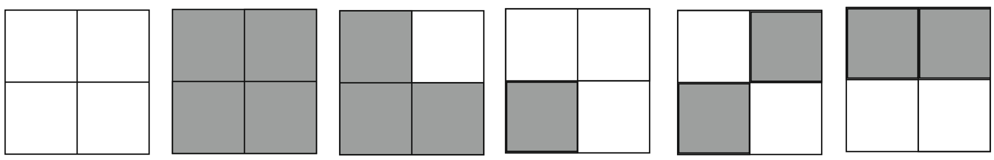
Arbeta stegvis och uteslut. Andreas kommer inte från Berlin, Paris eller Rom. Han måste komma från Dubrovnik. Robert kommer inte från Berlin eller Paris och inte heller inte från Dubrovnik. Han kommer från Rom. Marko kommer inte från Paris, Rom eller Dubrovnik.
Han är alltså från Berlin.
Problemet kan hanteras i en tabell med städer åt ett håll och pojkarnas namn åt ett. Markera vad ni har kommit fram till.

	Paris	Dubrovnik	Rom	Berlin
Andreas	nej	ja	nej	nej
Stefan				
Robert	nej	nej	ja	nej
Marko	nej	nej	nej	ja

Har man ”ja” i en position så måste övriga i samma rad samt övriga i samma kolumn vara ”nej”. Har man tre ”nej” i en rad eller en kolumn så måste den fjärde vara en ”ja”.

18 B: 6

Alla vita eller alla grå, 2 sätt. Tre grå och en vit eller tre vita och en grå, 2 sätt. Två vita och två grå, samma färg diagonalt eller samma färg intill varandra, 2 sätt.



Arbeta vidare med Ecolier 2010

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Vi ger här först några förslag till arbete med problemen generellt och därefter några förslag utifrån problemets innehåll.

– Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

– Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

– I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. Några exempel från årets Ecolier: *diagonal*, *kvadrat*, *triangel*, *cirkel*, *symmetrisk*, *symmetrilinje*, *spegling*, *rotation*, *rad och kolumn*, *summa*, *multiplikation*. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008)

– Några frågor att återkomma till när problemet är löst:
Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
Vilka nya frågor kan problemet väcka?
Lärde vi oss något nytt av problemet?

– Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga.
Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt.

– Avsluta med att låta eleverna konstruera egna liknande problem. Det är ett sätt att se om de har förstått det som varit centralt i problemet.

Rumsuppfattning och geometri

Som vanligt handlar flera problem om geometri. Det är naturligtvis allra lättast att lösa dem konkret, men syftet med problemen är inte att hitta det korrekta svaret i första hand. Det konkreta arbetet ska hjälpa eleverna att få förståelse. Därför är det också viktigt att samtala om det konkreta arbetet och lyfta fram de samband som ska illustreras. Under tävlingen har eleverna löst problemen utan hjälpmedel. I efterarbetet kan eleverna jämföra hur de tänkt, dvs deras föreställning, med en konkret representation. Att tolka en tredimensionell bild exempelvis är inte lätt och många måste få många möjligheter att jämföra bild och verklighet för att utveckla den förmågan.

I några problem är det förmågan att föreställa sig och vrida vända och flytta figurer i huvudet som utmanas.

1 I problem 1 måste man kunna se att plattan kan vridas åt olika håll och att den målade diagonalen då också vrids. I samband med arbetet passar det att arbeta med begreppet *diagonal*. Undersök diagonaler i olika månghörningar. Hur många finns det i trianglar, fyrhörningar, femhörningar, ...? Diskutera varför det inte kan finnas någon diagonal i en triangel. Undersök fyrhörningar av olika slag. I vilka av dem delar diagonalerna figuren symmetriskt. Vad får det för följd för storleken på delarna? Undersök storleken konkret genom att vika och klippa. Resonera också om varför två bitar är lika stora.

Låt eleverna lägga större och andra mönster med plattorna och rita av dem.

2 Problem 2 handlar om att kunna föreställa sig hur vägarna går under den svarta markeringen. Undersök vilka konsekvenser de andra alternativen får, t ex att katten är instängd och musen kommer åt mjölken (alternativ A). En elev kan med ord beskriva vilken situation han vill uppnå. Kamraten får avgöra vilken bild som ska användas.

Undersök var på bilden de olika utsnitten finns. Då behöver man också kunna vrida bilden. Låt eleverna först få försöka att göra det i huvudet och kontrollera sen eventuellt med utklippta bitar. Är det något av alternativen som inte finns på bilden?

Jämför bitarna med gatukorsningar i elevernas närmiljö, utanför skolan t ex.

Låt elever konstruera olika banor med bitarna. Kan de bygga en rundbana, som löparbanan på en idrottsplan? Gör andra skisser på banor och låt eleverna bygga dessa. Variera bitarna och hitta på egna kartor.

5 Även problem 5 handlar om en mental operation. Även om man utför problemet konkret måste man ha en idé om hur mynten ska flyttas. Vilka andra figurer kan man skapa med de sex mynten? Försök att göra en parallellogram. Lägg till ett antal mynt och skapa olika kända former. Diskutera hur antalet mynt påverkar vilka former som är möjliga att skapa.

Problem 5 kan lösas med flyttning av 2 mynt på ”andra sätt” än det som föreslås i lösningarna, dvs andra mynt kan flyttas. Jämför dessa lösningar. Undersök *symmetrier* i figuren.

3 Symmetri behandlas också i problem 3. Resonera om varför linjerna 2 och 4 inte är symmetrilinjer. Låt eleverna ersätta kängururna med andra figurer så att även dessa linjer skulle ha varit symmetrilinjer.

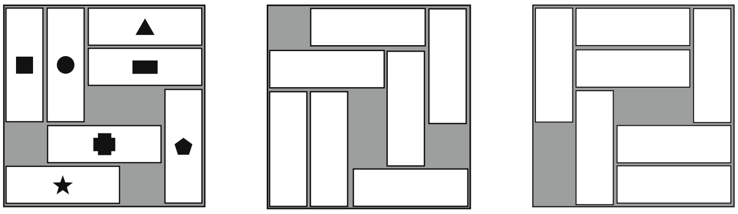
Undersök symmetrier i verkligheten, i naturen och på byggnader och i olika geometriska figurer.

10 Problem10 känner kanske många igen från spel de spelat på fritiden. Låt eleverna berätta om hur de löser dessa och vilka utmaningar de finner i dem.

Låt dem beskriva lösningen på problem 10 med ord, utan att numrera eller märka klossarna.

Eleverna kan säkert konstruera liknande pussel till varandra, kanske av olika storlek. En uppgift kan vara att konstruera ett pussel där man inte kan lägga in någon ytterligare bit, fastän det finns tillräckligt med tomma positioner.

Detta problem förekommer i olika varianter i flera tävlingsklasser i år: I alla handlar det om hur vi ska få rum med ytterligare en likadan kloss:



Hur ska klossarna flyttas?

11 Även problem 11 handlar om att i huvudet utföra en operation på en form. I det här fallet att klippa upp en kvadrat. För många elever kanske tolkningen av bilden är det stora problemet. Gör därför ett konkret exempel och jämför bild med verklighet. Identifiera de vikta sidorna och låt eleverna visa på den konkreta modellen vilka bitar som är vita på bilden. Diskutera hur man vet att det är undersidan och hur man ska tolka bildens upp- och nedvikningar.

4 Problem 4 handlar om mätningens princip. Ordna barnens fötter i storleksordning. Vilken längd har sandlådan? Diskutera mellan vilka mått den troligen ligger. Hur långa är respektive barns fötter?

Diskutera olika längdenheter och betydelsen av att vi har ett standardiserat måttsystem. Gör eleverna uppmärksamma på att en liten måttenhet ger ett större mätetal, att den som behöver flest steg för en sträcka har kortast steg (eller fötter, beroende på hur man mäter).

Ta gärna fram en stegmätare och visa att man på sådana måste mata in sin egen steglängd för att man ska kunna mäta den avlagda sträckan. Om man lånar en annans mätare och själv tar längre steg, har man då gått längre eller kortare sträcka än den som mätaren anger?

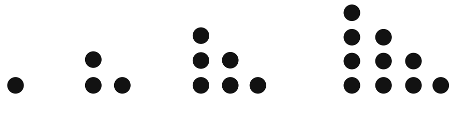
Tal

Många problem som förkommer i Kängurun handlar om heltalen. Elevernas förmåga att räkna börjar med de positiva heltalen och där byggs den grundläggande talförståelsen upp. Det är viktigt att eleverna har säkerhet i de positiva heltalens egenskaper och beräkningar med dem, innan nya talområden införs. Resonera med eleverna om de positiva heltalen. Låt dem fundera på ”Vilket är det största talet?” och motivera sina svar. Använd en tallinje som stöd. Behandla de olika räknesättens innebörd, gärna i samband med problem 16, där beräkningen inte efterfrågas. I samband med multiplikation kan begrepp som *faktor*, *multipel av*, *delbarhet*, *primtal*, *primtalsfaktorisering* behandlas.

7 I problem 7 finns en del av en tabell över alla tal från 1 till 100. Låt eleverna göra en likadan tabell där alla heltalen från 1 till 100 syns. Ta gärna kopior av deras tabell så de kan rita och markera i den flera gånger. Den här tabellen kan vara utgångspunkt för arbetet under många lektioner.

– Hur många rader och kolumner får den? Vilket samband finns mellan talen i en kolumn? Hur kan vi beskriva sambandet med ord, med aritmetiskt uttryck (t ex $1+1\cdot 5$, $1+2\cdot 5$, $1+3\cdot 5,\ldots$), med ett generellt uttryck? Generella uttryck kan inledningsvis skrivas med ord, så att eleverna bygger upp sin förståelse för att symboluttrycken är förenklingar av uttryckssätt. Här har vi ett exempel på en *aritmetisk talföljd*, differensen mellan två på varandra följande tal är konstant. Beskriv sambanden mellan talen i en rad i tabellen på liknande sätt. Vilken är summan av talen i första raden? Låt eleverna fundera på hur de kan beräkna summan av talen i de övriga raderna genom att använda sambandet mellan talen i en kolumn.

– Vilken är summan av alla talen i tabellen, dvs vad är $1+2+3+\ldots+100$? Resonera om olika sätt att beräkna denna summa. Ett sätt att se hur denna och liknande summor kan beräknas är att börja med färre termer och illustrera det med en bild. Låt eleverna beräkna 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, osv. Dessa summor kallas *triangeltal* eftersom talen kan ställas upp som en triangel.



– Betrakta först kolumnen längst till höger. Vad kan eleverna säga om de talen? Låt eleverna bekanta sig med uttrycken *delbar* med 5 och *multipel* av 5. Hur är det med talen i de övriga kolumnerna? Utgå från det första talet i kolumnen (1, 2, 3 eller 4) och resonera om vilka tal som är delbara med eller multiplar av det talet. Varför blir det varje, vartannat, vart tredje respektive vart fjärde tal?

– Kan man göra en tabell med ett annat antal kolumner? Vilka samband finns mellan antal kolumner och rader om tabellens alla rutor måste vara ifyllda? Resonera kring frågorna under punkt 1 och 2, dvs se på sambanden mellan talen i raderna och kolumnerna och undersök delbarhet.

– Arbeta med en hundraruta, dvs en tabell med talen 1 till 100. Låt eleverna först stryka över alla tal som är delbara med 2, förutom talet 2. Resonera gemensamt fram till en definition av udda och jämna tal: ett tal som är delbart med 2 är jämnt och de som inte är delbara med 2 är udda. Vad är gemensamt för alla tal som finns kvar i rutan, förutom 2? Fortsätt nu med att stryka alla tal som är delbara med 3, förutom talet 3. Fortsätt sen med de resterande udda talen, men stryk inte det första. Berätta för eleverna att de tal som finns kvar kallas *primtal* och att de har en gemensam egenskap. Låt eleverna formulera med ord vad som utmärker ett primtal. Tala om för dem att talet 1 inte är ett primtal.

– Låt eleverna sen arbeta med de tal som inte är primtal och skriva dem som produkter av primtal, primtalsfaktorisering. Börja med talen i tvåans tabell, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 3 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ osv.

– Om eleverna är relativt säkra på multiplikation kan man också göra ovanstående på omvänt sätt. Låt eleverna undersöka talen 1 – 100 och skriva dem som produkter på så många sätt som möjligt. Då visar det sig att vissa tal endast kan skrivas som en produkt, nämligen talet självt · 1. Vilka tal har många olika produkter, vilka har få? Låt eleverna undersöka produkterna och se efter olika samband. Här finns det mycket att upptäcka, t ex att talet 12 har många delare, 2, 3, 4 och 6. Detta är troligen en förklaring till att 12 varit bas i olika måttsystem och fortfarande är det, t ex när vi räknar tid.

12 I det fortsatta arbetet kan man gå vidare med problem 12.
– Hur många rader och kolumner består den tabellen av?
– Vilket samband finns det mellan de två elementen i en kolumn?
– Vilken summa har en rad?
– Skriv upp den tredje raden om samma samband gäller.
– Vilken blir sista talet i den raden.
Jämför även med ett liknande problem, Junior 3 i årets tävlingsomgång. Andra lämpliga problem att ta upp från årets övriga tävlingsklasser kan vara Benjamin 12, Benjamin 19, GyCadet 8.

9 I problem 9 har tusenfotingen Ingemar 100 fötter. Låt eleverna göra en skiss över Ingemar och hans fötter. Hur många par fötter har Ingemar? Hur många par skor hade han innan han handlade och hur många ytterligare par skor behöver Ingemar köpa för att alla fötterna ska ha skor? Låt Ingemar ha 1000 fötter och be eleverna konstruera liknande problem åt varandra.

13 Låt eleverna rita höghuset i problem 13. Vilken våning skulle Martin ha hunnit till om de andra svarsalternativen var korrekta? Vilken våning bor Martin respektive Klara på om Martin har hunnit en tredjedels väg eller en fjärdedels väg när han var på våning 8. Låt eleverna konstruera liknande problem åt varandra. Jämför även Benjamin 3.

14 I problem 14 handlar det om att kombinera tal och att se på relationen mellan antalet bilar och antalet bussar. Problemet begränsas av det handlar om föremål i verkligheten, vi kan bara hantera positiva heltal. Låt eleverna undersöka vilka möjliga antal fordon som kan forslas på 1, 2, 3, etc fullastade turer. Hur många bilar kan åka med om vi har lastat på en buss?

Gör t ex en tabell över de olika möjligheterna för färjeturerna , antal bilar och antal bussar

	Antal bilar	Antal bussar	Antal bilar	Antal bussar	Antal bilar	Antal bussar
Färjetur 1						
Färjetur 2						
Färjetur 3						
Färjetur 4						
Färjetur 5						

Förändra relationen till att färjan kan ta 10 bilar eller 5 bussar. Hur förändras problemet? Detta problem illustrerar det som kallas diofantiska ekvationer, och går att lösa med hjälp av ekvation.

Problemlösningsstrategier

I några problem är det främst en generell problemlösningsförmåga som efterfrågas. Att tolka problemet, plocka ut väsentlig information, finna en passande metod och bedöma resultatet.

8 och 17

Problem 8 och 17 handlar båda om att hålla reda på information och systematisera. I många fall är det bra att rita någon form av bild. Uppmuntra eleverna att förenkla sina bilder och bara ta med det som är väsentligt. För en del elever är dessa problem svåra pga att de är textrika. De behöver hjälp med hur texten ska angripas. Arbeta gemensamt med problemet, gå igenom ord och uttryck och se till att alla förstår vad som står. Gå sedan igenom texten steg för steg och diskutera vilken information som är av betydelse och hur den är relaterad till tidigare information. Jämför olika sätt att bokföra och hålla ordning.

Om eleverna får hjälp att utveckla en metod att angripa textproblem kan det hjälpa dem att våga försöka och inte direkt hoppa över uppgifter med mycket text. Vår erfarenhet är ändå att lösningsfrekvensen på dessa problem är relativt hög, pröva därför gärna problem som varit i andra tävlingsklasser, bl a Benjamin 3 och 10, 2009; Ecolier 3, 13 och Benjamin 19, 2009. Arbeta också med de andra tävlingsklasserna 2010, t ex Benjamin 21.

18 I problem18 handlar det om att finna *alla* sätt och också att *veta* att alla sätt är funna. Därför måste det behandlas systematiskt. Undersök motsvarande problem med två rutor och tre rutor. Jämför med Benjamin 13, 2010, som är ett liknande problem med 5 rutor, fast rutorna där är kronblad på en blomma. På vilket sätt förändras problemet om vi betraktar de fyra kvadraterna i problemexemplet som olika?

Detta är ett kombinatoriskt problem. Exempel på problem inom detta område är:

Hälsa på varandra: Hur många handskakningar blir det om alla hälsar på alla vid en fest?

Köpa glass: Hur många olika glassar kan man kombinera med fyra smaker om man får ta två kulor?

Mössor och halsdukar (Milou 4, 2010). På hur många olika sätt kan man klä sig i mössa och halsduk om man har två mössor och två halsdukar? Det kan förstås varieras med byxor och tröja, skor och strumpor etc.

Köpa pizza (Benjamin 17, 2010). Hur många olika pizzor kan man få om det finns fyra olika tillbehör om man kan välja ett eller två, och om pizzorna finns i tre olika storlekar?

Gör flera exempel på kombinatoriska problem och låt eleverna upptäcka vad som är gemensamt. Börja med få möjligheter, ett litet antal gäster på festen etc. Gör det konkret, illustrera på olika sätt och gör en tabell. Öka sedan antalet och jämför. Om det är ett litet antal objekt kan man finna en lösning genom ett systematiskt tillvägagångssätt. Blir antalet för stort måste man finna en mer generell metod. Att utveckla förståelse för dessa metoder så att de kan användas som verktyg vid liknande frågeställningar är det långsiktiga målet. För att nå dit behöver eleverna många exempel där de kan lösa problemet konkret och ha överblick över alla möjligheter. Utifrån sådana erfarenheter kan de senare generalisera.

I Strävorna 4E finns aktiviteterna *Bondgården* och *Nallarna*.

Att läsa

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. &Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2007 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens mål.