Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2010

Här följer svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. De flesta problem kan lösas på flera sätt och eleverna har kanske ytterligare förslag.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 27 april.

Resultaten är värdefulla för oss i vårt fortsatta arbete med att utveckla Känguruproblemen. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att åtminstone fylla i redovisningsblankett A. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet.

Så snart du redovisat klassens resultat får du förslag på hur man kan arbeta vidare med problemen. Bland dem som gör en fullständig redovisning, både blankett A och B, lottar vi ut bokpaket.

Svar och lösningar

1: D 10001
$20102010 / 2010 = 10001$

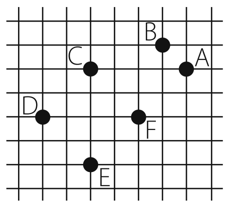
2: D 20
Antag att totalpoängen är x. Då är $0,90x = 0,85x + 1 \Leftrightarrow 0,05x = 1 \Leftrightarrow x = 20$.
Med resonemang kommer man fram till att 5 % motsvarar 1 poäng vilket ger totalpoängen 20.

3: C 1910
I nedre raden är summan av de 10 första talen större än summan av de 10 första talen i den övre raden, $10 \cdot 10 = 100$. Sista talet måste då vara $2010 - 100 = 1910$.

4: B 64 cm^2
Varje kub bidrar med 4 sidoytor till rätblockets begränsningsyta. En sidoyta har arean 4 cm^2. Det ger $16 \cdot 4$ cm^2 = 64 cm^2.

5: D 15
Antag att Rosa är n år, då har hon fått $1 + 2 + \ldots + n = 120$ rosor. Det är en aritmetisk summa, $\frac{n(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow n(n+1) = 240$ med lösning $n = 15$.

6: E Det är möjligt för alla figurerna.
Låt C, D, E och F vara hörn i en kvadrat. A, C, D och F kan vara hörn i en parallellogram, A, C, D och E kan vara hörn i en parallelltrapets, A, D och F kan vara hörn i en trubbvinklig triangel.



7: B $11 \cdot 11$
För varje udda tal som adderas får vi nästa kvadrattal. Det ger att $1+3+5+7+9+\ldots+17+19+21=11\cdot 11$.

8: D 6
Eftersom hon kommer tillbaka till sin utgångspunkt måste hon ha promenerat över floden ett jämnt antal gånger. Då antalet broar är 5 så är minst antal möjliga gånger 6 st.

9: A $\sqrt{2}$
Eftersom $AB=1$ ger det att även $EC=FC=FB=1$. DCF är en likbent rätvinklig triangel, där de lika långa sidorna har längden 1. Det ger att $DF=\sqrt{2}$.

10: C 1980
Faktoruppdelning av 2010 i två faktorer ger att den enda faktoruppdelningen som ger ett rimligt svar är $30 \cdot 67$. Läraren föddes 1980.

11: D 40°
Vi har en konkav fyrhörning med vinklarna 30°, 20°, 270° och x°. Eftersom vinkelsumman är 360° blir $x=40°$.

12: B 2009
Sifferprodukten 2 ger att en siffra i talet är 2 och övriga är 1. Siffersumman 2010 ger att talet består av en tvåa och 2008 ettor. Vi kan bilda 2009 sådana heltal.

13: C 6π
Omkretsen av ett område består av tre delar, en del från den stora cirkeln (kvartscirkel) och två från bågarna, där varje båge är en halvcirkel. Det ger att $2\pi + 2(2\pi) = 6\pi$

14: D Daniel
Förbind varje punkt med origo. Då har linjen till Daniel den största lutningen.

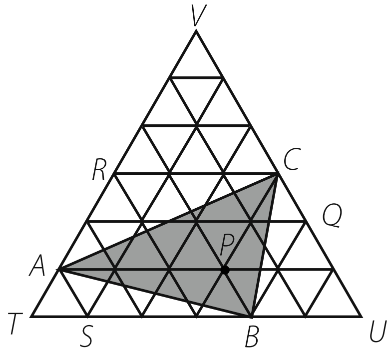
15: B 3
Låt den oskuggade ytan i den erhållna figuren ha arean a. Då vet vi att triangelns area är $1{,}5(a+1)$. Viker vi tillbaka, så består triangeln av de två oskuggade delarna, vardera med area a och de tre skuggade delarna med sammanlagda arean 1. Det ger följande ekvation: $1{,}5(a+1)=2a+1$ med lösning $a=1$. Triangelns area är 3.

16: C 1,1 m

10 vagnar ger längden 2,9 m och 20 vagnar ger längden 4,9 m. Raden blir alltså 2 m längre med 10 vagnar. För varje vagn blir raden 0,2 m längre. Tar vi bort 9 vagnar blir raden 1,8 m kortare. En vagn har längden 2,9 m – 1,8 m = 1,1 m.

17: A 11 cm^2

Med hjälp av punkten P kan vi skapa parallellogrammerna $RCPA$, $CQBP$ och $APBS$. Varje parallellogram är till hälften skuggad. Den skuggade delen är $12/2 + 4/2 + 6/2 = 11$



Alternativ lösning:
Triangeln ABT har 4 gånger så stor area som triangeln AST, dvs en enhetstriangel, eftersom den har lika stor höjd men 4 gånger så lång bas. Motsvarande gäller för triangeln CUB, som har tre gånger så stor höjd och två gånger så lång bas. Triangeln AVC har på motsvarande sätt 5 gånger så stor höjd och 3 gånger så lång bas. Då får vi arean av triangeln ABC som $36-(4+6+15)=11$.

18: B 6

Eftersom parallelltrapetsen ABCD är likbent, är sidan CD = AB = 2. Eftersom $\angle CXD = 90°$, så är vinkeln en randvinkel till en cirkel med CD som diameter. Kalla cirkelns medelpunkt för M, då är XM cirkelns radie alltså $|XM| = |CD|/2 = 1$.Eftersom XM förbinder mittpunkter av trapetsens ben har vi $(|AD| + |BC|)/2 = |XM| = 1$ alltså $|AD| + |BC| = 2$ och omkretsen är $|AD| + |BC| + 2 \cdot 2 = 6$.

19: C 45 %

Betrakta varje topptriangel som bildas. Med hjälp av likformighet kan arean av varje sådan beräknas. Skillnaden i area mellan två på varandra följande topptrianglar ger arean av det bildade segmentet. Areaskalan är längdskalan i kvadrat. Längdskalan för respektive topptriangel är $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$ i relation till den stora triangelns längder. Det ger areaskalan $\frac{1}{100}, \frac{4}{100}, \ldots, \frac{81}{100}$

Arean av de grå segmenten är då $\frac{1}{100} + \frac{5}{100} + \frac{9}{100} + \frac{13}{100} + \frac{17}{100} = \frac{45}{100} = 45\,\%$.

20: C 55

n^n är ett kvadrattal om n är jämnt, $n = 2k$ ger $(2k)^{2k} = (2^k k^k)^2$. Det finns 50 jämna tal i intervallet $1 \leq n \leq 100$. n^n är även ett kvadrattal om n är ett kvadrattal, $n = m^2$ ger $(m^2)^n = (m^n)^2$. De jämna kvadrattalen har vi redan räknat men det finns fem udda. Alltså finns det sammanlagt 55 tal.

21: B 7

Vi vet att det är fyra bläckfiskar. Om alla fyra ljuger skulle påståendet 28 armar vara sant. Det innebär en motsägelse. Alltså måste minst en fisk tala sanning. Det kan heller inte vara fler än en som talar sanning eftersom alla svaren motsäger varandra. Det är alltså tre lögnare. Då får vi alternativen $3 \cdot 7 + 6 = 27$ eller $3 \cdot 7 + 8 = 29$. Alltså ljuger den röda bläckfisken.

22: D 13

Trianglarna ABC, BCD, osv är alla likbenta. Om de lika stora vinklarna i den första triangeln är v grader, så kommer de lika stora vinklarna i de följande trianglarna vara $2v$, $3v$, $4v$,… För varje triangel ökar alltså de lika vinklarna med v grader. Vi kan fortsätta att konstruera trianglar på detta sätt så länge $kv \leq 90°$, där k är antal trianglar. Eftersom $v = 7°$ ger olikheten att $k = 12$ och antal sträckor blir 13 (Den 14:e skulle korsa den 12:e).

23: A -2006

Betrakta mönstret för talen på en jämn position. Det är 2, 0, -2, 4, -6, 8, ... Från och med position 6 kommer vartannat tal att vara negativt och differensen mellan två på varandra följande negativa tal är 4. Dessa blir en aritmetisk serie. Talet på position 2010 är -2006.

24: E 45

Låt abc vara det tresiffriga talet. Då gäller att $b = \dfrac{a+c}{2} \Leftrightarrow a + c = 2b$. Är a udda så är även c det, är a jämn så även c det. $1 \leq a \leq 9$ och för varje värde på a finns det fem möjliga värden på c. Det ger att det finns 45 sådana tal.

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1				D		3
2				D		3
3			C			3
4		B				3
5				D		3
6					E	3
7		B				3
8				D		3
9	A					4
10			C			4
11				D		4
12		B				4
13			C			4
14				D		4
15		B				4
16			C			4
17	A					5
18		B				5
19			C			5
20			C			5
21		B				5
22				D		5
23	A					5
24					E	5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på webbadress ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 27 april.

Antal deltagande elever

Kurs	
B	
C	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

Kurs	Namn	Poäng
B		
C		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Kurs B	Kurs C
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
	Fördelade på kurser	
Uppgift nr	Kurs B	Kurs C
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		