Kängurun – Matematikens Hopp

Student 2010

Här följer svar och lösningar, samt rättningsmall och redovisningsblanketter. Vi ger förslag till lösningsmetod. Bland eleverna i klassen finns säkert andra lösningsmetoder representerade. I det fortsatta arbetet med problemen kan dessa diskuteras och jämföras.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 27 april.

Resultaten är värdefulla för oss i vårt fortsatta arbete med att utveckla Känguruproblemen. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att åtminstone fylla i redovisningsblankett A. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet.

Så snart du redovisat klassens resultat får du förslag på hur man kan arbeta vidare med problemen. Bland dem som gör en fullständig redovisning, både blankett A och B, lottar vi ut bokpaket.

Svar och lösningar

1. B $11 \cdot 11$
   För varje udda tal som adderas får vi nästa kvadrattal. Det ger att
   $1+3+5+7+9+...+17+19+21=11 \cdot 11$.

2. C 1910
   I nedre raden är summan av de 10 första talen större än summan av de 10 första talen i den övre raden, $10 \cdot 10=100$. Sista talet måste då vara $2010-100=1910$.

3. D 8 gånger
   Den mindre kuben har volymen 1 dm^3 och den större volymen 8 dm^3. Man måste alltså hämta 8 gånger.

4. D 125
   Slutsiffran måste vara 5. De övriga kan väljas på $5 \cdot 5 \cdot 5=125$ sätt.

5. B 3
   Man skjuter den vänstra nedåt och de två översta åt vänster och får plats för en till bredvid den stående längst till höger.

6. D 120°

Triangel ABC är en halv liksidig triangel, eftersom $\angle A = 60°$. Alltså är längden av sidan AC hälften av sidan AB. Det ger att triangel AMC är liksidig. $\angle BMC = 120°$.

7. E 2010

Prismat består av två parallella månghörningar med lika många hörn. Från varje hörn utgår tre kanter. Antal kanter måste vara delbart med 3, alltså 2010.

8. B 7

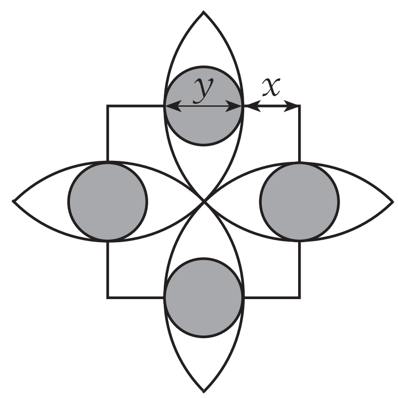
Vi vet att det är fyra bläckfiskar. Om alla fyra ljuger skulle påståendet 28 armar vara sant. Det innebär en motsägelse. Alltså måste minst en fisk tala sanning. Det kan heller inte vara fler än en som talar sanning eftersom alla svaren motsäger varandra. Det är alltså tre lögnare. Då får vi alternativen $3 \cdot 7 + 6 = 27$ eller $3 \cdot 7 + 8 = 29$. Alltså ljuger den röda bläckfisken.

9. A 1

Eftersom kvadrattermerna inte kan vara negativa är den enda lösningen när kvadrattermerna är 0, dvs när $x = 3$ och $y = 2$.

10. A $4(3 - 2\sqrt{2})\pi$

Låt d vara kvadratens diagonal. Pythagoras sats ger $d^2 = 8 \Leftrightarrow d = 2\sqrt{2}$. Då är halvcirkelns radie $\sqrt{2}$ och den skuggade cirkelns radie $\sqrt{2} - 1$ (medelpunkten på kvadratens sida).
Arean av fyra skuggade cirklar är $4\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = 4(3 - 2\sqrt{2})\pi$.



11. E 1

$\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}}$. Då är den geometriska seriens kvot $\dfrac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{-\frac{1}{6}}$ och nästa term blir $7^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{-\frac{1}{6}} = 1$

12. C 64π

Låt R vara den stora cirkelns radie och r vara den lilla cirkelns radie. Då är det skuggade områdets area $\pi(R^2 - r^2)$. Pythagoras sats ger $r^2 + 8^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - r^2 = 64$. Arean är 64π.

13. C 2009

Givet är $2x = 5y$. Då är $2(x + y) = 2x + 2y = 7y$. Alltså måste $x + y$ vara delbart med 7 och det enda alternativet är då $x + y = 2009$.

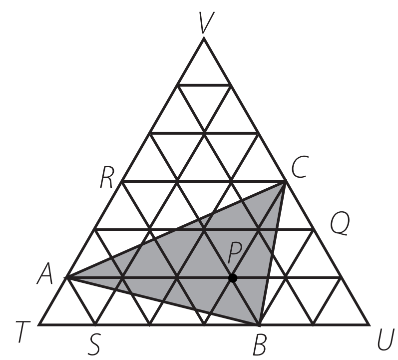
14 A 11 cm^2

Varje liten liksidig triangel har sidan $\frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}$ och höjden $3^{\frac{1}{4}}$. Arean av de oskuggade områdena är

$$\frac{4\cdot\frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2}+\frac{2\cdot\frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2}+\frac{5\cdot\frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2}=4+6+15=25$$

Då är arean av triangeln ABC lika med $36-25=11$ cm^2. Här följer 2 alternativa lösningar:

Med hjälp av punkten P kan vi skapa parallellogrammerna RCPA, CQBP och APBS. Varje parallellogram är till hälften skuggad. Den skuggade delen är $12/2+4/2+6/2=11$



Trianglen ABT har 4 gånger så stor area som triangeln AST, dvs en enhetstriangel, eftersom den har lika stor höjd men 4 gånger så lång bas. Motsvarande gäller för triangeln CUB, som har tre gånger så stor höjd och två gånger så lång bas.
Triangeln AVC har på motsvarande sätt 5 gånger så stor höjd och 3 gånger så lång bas. Då får vi arean av triangeln ABC som $36-(4+6+15)=11$.

15 A 1

När vi drar 5 bollar och minst två är röda innebär det att det kan finnas högst tre bollar av annan färg. Alltså är blå+grön ≤ 3. Med villkoren blå+grön ≤ 3 samt minst en av samma färg så måste det vara de röda bollarna som uppfyller minst tre av samma färg. Då minst 3 är röda så kan det i det här fallet inte vara mer än en blå boll.

16 E Något annat tal

Om vi skulle multiplicera alla tal skulle ettan vara onödig. För att utnyttja ettan blir det största talet vi kan få $1+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$. Eftersom 2, 3, 5 och 7 är delare i $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$ kan inget av de talen vara den minsta primtalsfaktorn i $1+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$.

17 A 35

Det finns fyra möjliga faktoruppdelningar av 105: $1\cdot105$, $3\cdot35$, $5\cdot21$ och $7\cdot15$. Det enda faktorparet som i kombination med 13 uppfyller triangelolikheter är 7 och 15. Omkretsen är 35.

18: C 45 %

Betrakta varje topptriangel som bildas. Med hjälp av likformighet kan arean av varje sådan beräknas. Skillnaden i area mellan två på varandra följande topptrianglar ger arean av det bildade segmentet. Areaskalan är längdskalan i kvadrat. Längdskalan för respektive topptriangel är $\frac{1}{10},\frac{2}{10},\ldots,\frac{9}{10}$ i relation till den stora triangelns längder.

Det ger areaskalan $\frac{1}{100},\frac{4}{100},\ldots,\frac{81}{100}$

Arean av de grå segmenten är då $\frac{1}{100} + \frac{5}{100} + \frac{9}{100} + \frac{13}{100} + \frac{17}{100} = \frac{45}{100} = 45\,\%$.

19 D 12

Om alla sagt sin korrekta placering hade summan blivit 5050. Istället blev den 1050 mindre. Den största avvikelsen fås om de med placeringar på slutet säger att de kommit på plats nr 1. Det ger

$(100-1)+(100-2)+(100-3)+...+(100-n)=100n-(1+2+...+n)$.

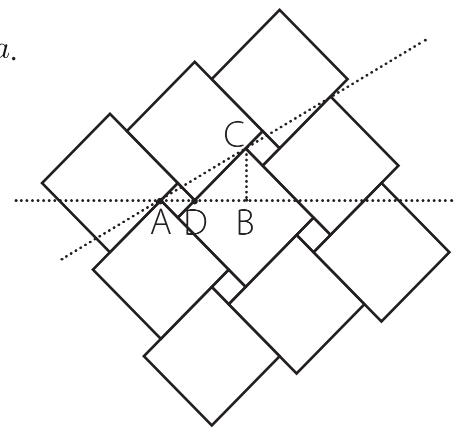
Om 10 personer säger fel plats blir avvikelsen som mest 945. Om 11 personer säger fel plats blir avvikelsen som mest 1034. Om 12 personer säger fel plats blir avvikelsen som mest 1122.

20 D $\frac{8}{15}$

Det finns 15 möjligheter för de två första kasten att ge en summa som är större än 1 men mindre än eller lika med 6. I åtta av de möjligheterna ingår en tvåa.

21 B $(2+\sqrt{3}):1$

Den stora kvadraten har sidan a och diagonalen $\sqrt{2}a$.
Den lilla kvadraten har sidan b och diagonalen $\sqrt{2}b$.



Med beteckningar i figuren är $\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$ (1)

$AD = \sqrt{2}b, DB = BC = x, CD = a - b$

Pythagoras sats i triangel DBC ger

$$2x^2 = (a-b)^2 \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

Insättning i (1) ger

$$\frac{\frac{a-b}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}b + \frac{a-b}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}(a-b) = a+b \Leftrightarrow a(\sqrt{3}-1) = b(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$$

22 B 451

Det finns 100 tal på tavlan. Den totala summan av dessa tal är

$$10 \cdot \frac{(1+10)\cdot 10}{2} = 10 \cdot 55 = 550$$

Både antal tal och deras summa minskar med 1 i varje drag. Efter 99 drag blir ett tal kvar och det är $550 - 99 = 451$.

23 C 3^{2048}

Om vi börjar med ett räkneexempel. Betrakta mönstren som uppstår:

k_1 ger $\dfrac{(2+3)+2^2}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$

k_2 ger $\dfrac{(2+3)(2^2+3^2)+2^4}{3^2} = \dfrac{5\cdot 13+16}{9} = \dfrac{81}{9} = 3^2$

k_3 ger $\dfrac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)+2^8}{3^4} = \dfrac{5\cdot 13\cdot 97+256}{3^4} = \dfrac{3^8}{3^4} = 3^4$

Om vi fortsätter så här skulle resultatet bli $k_{12} = 3^{2048}$

Generell lösning: Sätt $a_n = 2^{2^n}$, $b_n = 2^{3^n}$, $c_n = b_n + a_n$, $d_n = b_n - a_n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

För $n = 0$ är $d_0 = 3 - 2 = 1$.

Då är $a_{n+1} = 2^{2^{n+1}} = 2^{2^{n\cdot 2}} = 2^{2^n+2^n} = 2^{2^n}\cdot 2^{2^n} = (2^{2^n})^2 = a_n^2$ och med samma resonemang $b_{n+1} = b_n^2$

Vidare är $c_n \cdot d_n = (b_n + a_n)(b_n - a_n) = b_n^2 - a_n^2 = b_{n+1} - a_{n+1} = d_{n+1}$ (1)

$$\frac{(a_0+b_0)(a_1+b_1)\ldots(a_{10}+b_{10})(a_{11}+b_{11})+a_{12}}{b_{11}} = \frac{c_0c_1\ldots c_{10}c_{11}+a_{12}}{b_{11}}$$

Multiplicera med d_0 och tillämpa (1) successivt, det ger

$$\frac{d_0c_0c_1\ldots c_{10}c_{11}+a_{12}}{b_{11}} = \frac{d_1c_1\ldots c_{10}c_{11}+a_{12}}{b_{11}} = \frac{d_2c_2\ldots c_{10}c_{11}+a_{12}}{b_{11}} = \ldots =$$

$$\frac{d_{10}c_{10}c_{11}+a_{12}}{b_{11}} = \frac{d_{11}c_{11}+a_{12}}{b_11} = \frac{d_{12}+a_{12}}{b_{11}} = \frac{b_{12}}{b_{11}} = b_{11} = 3^{2048}$$

24 A 993

$$2f(x) + 3f(\frac{2010}{x}) = 5x$$

Insättning av $x = 6$ ger $2f(6) + 3f(\dfrac{2010}{6}) = 5\cdot 6 \Leftrightarrow 2f(6) + 3f(335) = 30$

Insättning av $x = 335$ ger $2f(335) + 3f(6) = 5\cdot 335$.
Det ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2f(6) + 3f(335) = 30 \\ 2f(335) + 3f(6) = 1675 \end{cases}$$

med lösning $f(6) = 993$

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1		B				3
2			C			3
3				D		3
4				D		3
5		B				3
6				D		3
7					E	3
8		B				3
9	A					4
10	A					4
11					E	4
12			C			4
13			C			4
14	A					4
15	A					4
16					E	4
17	A					5
18			C			5
19				D		5
20				D		5
21		B				5
22		B				5
23			C			5
24	A					5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på webbadress ncm.gu.se/kanguru/. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Senaste datum för redovisning av resultat är 27 april.

Namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

Kurs	Namn	Poäng
D		
E		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Kurs D	Kurs E
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
	Fördelade på kurser	
Uppgift nr	Kurs D	Kurs E
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		