Kängurun – Matematikens hopp

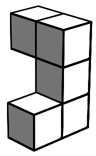
Benjamin 2011

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också lösningsförslag. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problem i klassen.

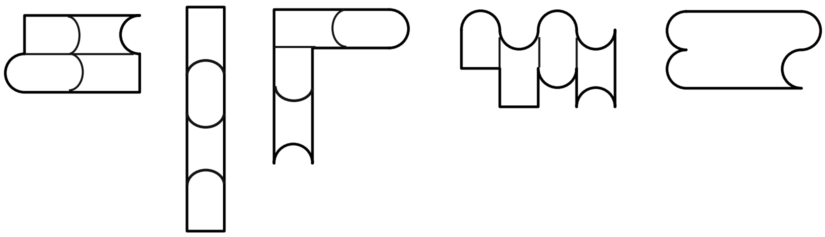
Svar och lösningar

1: C onsdag — Åtta bokstäver kräver en vecka + en dag.

2: E



3: E



Bitarna har tillsammans lika många inbuktningar som utbuktningar. Figuren i E har tre utbuktningar men bara en inbuktning, vilket inte går att få.

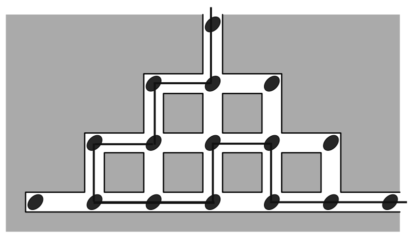
4: D 750 liter — 1/4 av vattenmängden hamnar i behållare X och resten i behållare Y.

5: A kvadrat — Alla andra är möjliga. En kvadrat är omöjlig att dela i två kvadrater med ett snitt eftersom snittet skulle behöva dela alla fyra sidor.

6: E 167 — Summan måste vara 167 eller 96 (de tre termerna måste alla vara lägre än summan). Med överslag och kontroll av entalssiffrorna hittar vi $17 + 30 + 49 = 96$.

7: A 3 — Om hon hade givit ett fel svar hade hon fått $10 + 9 - 1 = 18$ poäng, två felsvar ger $10 + 8 - 2 = 16$, tre felsvar $10 + 7 - 3 = 14$.
Alla rätt hade givit 20 poäng, varje fel leder till 2 poäng färre, dels den förlorade pluspoängen och dels minuspoängen.
Eller:
Hon fick 4 poäng för 4 rätta svar. De övriga 6 fick hon ingenting för, därför att de var lika många rätt som fel, alltså tre rätt och tre fel.

8: B 13 — Vi har ritat en väg som ger Fridolin 13 frön. Ett frö ligger i en återvändsgränd så det kan Fridolin inte plocka, för då skulle han fastna där eftersom han inte får passera samma ställe två gånger. Det finns flera möjliga vägar och Fridolin kan komma åt vilket frö som helst utom det i återvändsgränden, men inte fler än 13.



Ett sätt att visa att 13 är det maximala antalet finns beskrivet i ”Arbeta vidare med problemen”.

9: A 5 — 01-03-05; 03-05-07; 05-07-09; 07-09-11; 09-11-13.
Det finns endast 12 månader, vilket utgör den första begränsningen.

10: C Disa, Sofia, Pia, Maja
Arbeta baklänges.

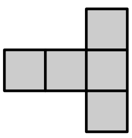
11: D 56 — Längs varje sida är det 5 svarta och 4 vita plattor, enligt mönstret.
Totalt har golvet $9 \cdot 9 = 81$ rutor. $81 - 25 = 56$.

12: B 891 — Talen på vardera sidan om 2011 är 1210 och 2101. $2101 - 1210 = 891$.

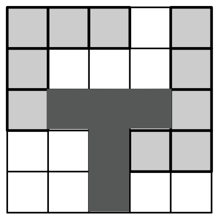
13: C 64 — Fyra kuber ligger utanför områdets sida, i hörnen. Det kvadratiska området får sidan 8.

14: B 3–0 — Den match de förlorade måste vara den match då de släppte in ett mål.
Den oavgjorda matchen blev alltså mållös. Återstår 3 mål till den match som de vann.

15: D



D är den enda bit som kan spärra för de övriga, och bilden visar hur den gör det.



16: D 4 — Punkterna mellan 1 och 2 och mellan 2 och 3 måste markeras med 4.
Fortsätter vi undersöka ser vi att det måste bli fyra 4, varannan punkt. Vid den återstående punkten kan det dock stå 1, 2 eller 3, men inte 4.

17: C 3 — Punkten ska sättas så att den utgör det fjärde hörnet i en parallellogram.
Detta hörn ska ligga diagonalt mot ett av de andra hörnen vilket innebär att det finns tre möjligheter.

18: A fem onsdagar
Eftersom det bara finns fyra fredagar och fyra måndagar måste månadens första dag infalla på den första lördagen. De följande lördagarna blir 8, 15, 22 och 29.
Eftersom det inte finns fem måndagar är detta en månad med 30 dagar.
Den första i följande månad är alltså en måndag.
Alla månader med 30 dagar följs av en månad med 31 dagar vilket ger att den 31 är en onsdag. Det finns alltså fem måndagar, tisdagar och onsdagar i den följande månaden.

19: C 2

Antag att Simba talar sanning.
Då ljuger Murre, Puma talar sanning ochTiger ljuger.
Antag att Simba ljuger.
Då talar Murre sanning, Puma ljuger och Tiger talar sanning.
I båda fallen är det två katter som ljuger och två som talar sanning.

20: E 6

Eftersom de sidor som möts ska ha summan 5 kan det bara vara 2, 3 eller 4 på den nedersta tärningens översida.
På den nedersta tärningen kan det inte vara 4, för det skulle leda till att den mellersta tärningen hade 1 och 6 på de sidor som möter de andra tärningarna. Den nedersta tärningen har alltså 2 eller 3 uppåt.
3 leder till att den mellersta tärningen har 2 nedåt och 5 uppåt, det går inte.
Om den nedersta tärningen har 2 uppåt får vi 3 och 4 på den mellersta tärningens sidor och 1 och 6 på den översta.
Eller:
Översidan på den nedersta tärningen och undersidan på den mellersta har tillsammans 5 prickar.
Översidan på den mellersta tillsammans med undersidan har sammanlagt 7 prickar.
Översidan på den mellersta har alltså två fler prickar än översidan på den nedersta.
Samma resonemang ger att översidan på den översta tärningen (markerad med x) har två prickar fler än översidan av den mellersta, alltså fyra fler än översidan av den nedersta som har minst två eftersom ettan är på sidan. Alltså har den kryssmarkerade inte färre än sex.

21: D 56 cm^2

Den längre kateten är 14 cm. Två sådana + den korta kateten är 30 cm, så den korta kateten är 2 cm.
Två trianglar har den sammanlagda arean 28 cm^2, alltså är den sammanlagda arean 56 cm^2.

Arbeta vidare med Benjamin 2011

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem och arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika representationsformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur det konkreta uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och om strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. Några exempel från årets Benjamin: *rätblock, kub, parallellogram, rektangel, kvadrat, triangel, rätvinklig, likbent, area, heltal, addition*. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008)

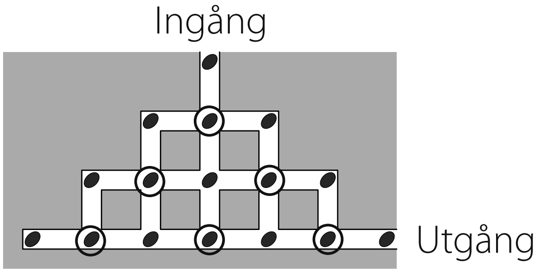
Här har vi sorterat förslag under några rubriker. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Här har vi hänvisat till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Logiskt resonemang och problemlösningsstrategier

Att välja en effektiv strategi är viktigt i alla problem, men i några av årets problem står valet av strategier och resonemang i centrum, t ex i 8, 10, 14, 16, 19 och 20.

8 *Labyrinten*. Det finns flera möjliga vägar för Fridolin, som kan komma åt vilket frö som helst utom det i återvändsgränden. Men han kan inte komma åt fler än 13.
Ett sätt att visa detta:

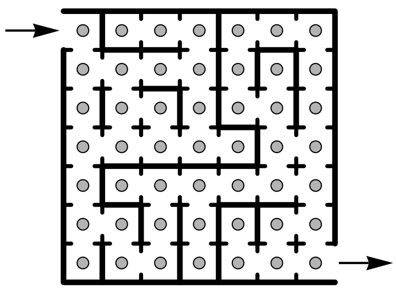


Vi markerar pumpafrön på så sätt att vart och ett av de 21 gångavsnitten (tunnlarna) förbinder ett markerat pumpafrö med ett omarkerat. Vi får 6 markerade fön.

Fridolin börjar vid ingången. Där ligger det första fröet, omarkerat. Tunneln som börjar där, slutar vid ett markerat frö. Det blir det andra fröet. Därifrån kommer Fridolin till ett tredje frö som är omarkerat vilken riktning han än väljer. Så kommer det att fortsätta, det fjärde markerat, det femte omarkerat, det sjätte markerat osv. Vartannat är markerat och vartannat omarkerat. Det blir därför lika många markerade som omarkerade frön som Fridolin kan plocka på sin väg. Men han får också ett extra omarkerat eftersom vägen både börjar och slutar med ett sådant. Det kan ligga högst 6 markerade pumpafrön utefter Fridolins väg, eftersom det inte finns fler och högst alltså 7 omarkerade, tillsammans högst 13 pumpafrön.

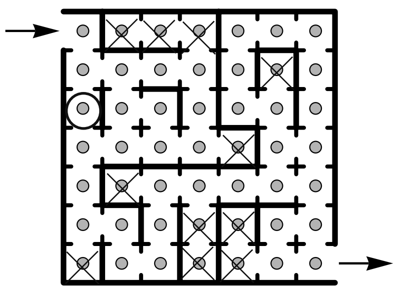
– Finns det en väg från ingången till utgången med exakt 10 frön på?
– Vilka olika antal är det möjligt för Fridolin att få?

Ecolier 10 är också ett problem med labyrint.



På bilden ser du en labyrint. I varje liten ruta i labyrinten ligger en bit ost. Musen Kim går in i labyrinten och vill komma åt så många ostbitar som möjligt. Han kan inte gå i samma ruta mer än en gång.
Vilket är det största antal ostbitar han kan få?

A: 17 B: 33 C: 37
D: 41 E: 49



Hur kan man resonera där? Diskutera vilka rutor som Kim inte ska besöka. Varför ska han inte besöka några rutor markerade med kryss? Varför inte den ruta som är markerad med cirkel?

Se också Ecolier 2010, 2.

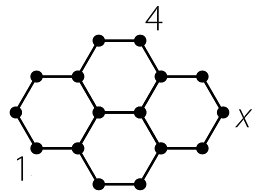
10 *Bänken*. Här gäller det att finna ett sätt att angripa problemet och att hantera informationen på ett strukturerat vis. Det är förmågor som är bra att ha med sig. Arbeta gärna konkret med problemet. Visa att det går bra att arbeta baklänges för att komma fram till lösningen.

Se också C 2005, 17; E 2007, 14; B 2007, 13; E 2008, 3; B 2008, 19 & E 2010, 17, som alla kräver att man strukturerar information.

14 *Fotbollsmatchen*. Analysera de olika svarsalternativen och hur de stämmer med förutsättningarna. Låt eleverna konstruera liknande problem till varandra. Undersök resultattabeller i tidningen. För en del elever kan det vara motiverande att se att matematik används i för dem relevanta sammanhang.
– Undersök vilka konsekvenser det får med andra sätt att värdera vinst, oavgjort och förlust än de som används i tabellsammanhang.
– Skulle man kunna ha minuspoäng vid förlust? Jämför med problem 7, Frågesporten.

16 *Åttahörningen*. Om eleverna inte redan har upptäckt att det kan stå antingen 1, 2 eller 3 på en av punkterna kan de undersöka det.
– Ta bort 1, 2 eller 3 från ursprungsproblemet och undersök om det påverkar lösningen.
– Hur många olika siffror måste vi som minst använda?
Junior 4 är ett liknande problem:

> Figuren visar en bild av grafén. Vid varje punkt ska ett tal skrivas.
> Summan av talen vid två närliggande punkter ska vara densamma.
> Två av talen är redan inskrivna.
> Vilket tal ska skrivas vid punkten märkt x?
>
> A: 1 B: 3 C: 4
>
> D: 5 E: mer information behövs



19 *Katterna* tillhör en typ av problem med lögnare och sanningssägare som ibland förekommer i Kängurun. Sådana problem ställer krav på resonemangsförmågan. Ett sätt att hantera sådana problem är att göra ett antagande och sedan undersöka vad det leder till.
Tidigare problem C 2002, 12; C 2004, 18; J 2007, 10; C 2008, 17, C 2009, 13, B 2010, 21 och GyC 2010,24.

20 *Tärningarna*. Låt eleverna pröva att ändra förutsättningarna, t ex så att summan av prickarna på de sidor som möts ska vara 7 eller 6. Vilket är den lägsta möjliga summan? Varför? Vilket är den största?
Se också aktiviteten *Rika tärningar* som finns på Nämnarens webbplats, ncm.gu.se/namnaren, under artikelregister, sök på ”Rika tärningar”.

Tärningar kan användas för spatiala problem, som i det som finns på årets Ecolier, nummer 18. Där handlar det om att föreställa sig och resonera om hur ett tärningsbygge ser ut från andra sidan.

Vi har samlat ett antal tidigare tärningsproblem i ett dokument som finns att hämta på ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_tarningar_2011.pdf.

Se också E 2007, 9; E 2009, 15; B 2001, 20; B 2010, 14 och 18.

Mönster

När vi i matematik talar om mönster menar vi något som upprepas efter en speciell regel. Det kan vara tal, former och förändringar. Mönster är centralt i matematiskt arbete. I skolan handlar problem ofta om att eleverna ska fortsätta ett figurativt mönster, så som i problem 11. Avsikten är bland annat att de ska utveckla sin förståelse för formler och generaliseringar. Den typen av problem passar mycket bra för att gå mellan olka representationer. Vi skapar mönstret konkret eller med bilder, uttrycker det muntligt och skriftligt med ord och med symboler, i text eller tabeller. Att uttrycka samband och begrepp med olika representationer är bra för att utveckla förståelsen. Nämnaren 2011, nr 2 behandlar mönster och undervisning om mönster på olika nivåer. Boken *Rika matematiska problem* (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005) ger konkreta råd och stöd för undervisningen.

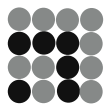
11 *Golvplattorna* är ett typiskt exempel på mönsterproblem. Bygg eller rita och undersök systematiskt. Gör en tabell över antalet svarta längs sidan, hela sidan, totalt antal svarta och antalet plattor totalt. Diskutera och jämför. Låt eleverna uttrycka mönstret skriftligt och muntligt och med symboler. Som ett steg i att utveckla formler kan de uttrycka mönstret med en blandning av skrivna ord och symboler.

I en mycket tidig omgång av Kängurun förekom detta problem:

> Jan och Lars lägger ett kvadratiskt mönster av lika stora, kvadratiska brickor.
> Lars lägger en röd bricka i mitten. Sedan lägger Jan 8 gröna brickor runt omkring den, för att bygga en andra kvadrat. Lars fortsätter sedan och lägger 16 gula brickor runt dessa, för att bygga en tredje kvadrat.
> Hur många brickor kommer Lars att behöva för att bygga den femte kvadraten?
>
> a: 32 b: 64 c: 81 d: 121 e: 125

Några förslag på frågeställningar:
– Jämför antalet brickor i ramkvadraterna och antalet brickor i hela figuren. Vilka tal beskriver antalet i hela figuren? Varför?
– Hur många brickor finns på varje sida i de olika kvadraterna? Hur fortsätter det? Varför är det bara udda antal?
– Studera talserien som uppstår för ramkvadraterna: 1, 8, 16, 24, … Hur fortsätter den? Varför?

Problem 17 handlar om kvadrater, liksom problem 13, *Ramen*. Bygg ramen konkret eller rita. Resonera gemensamt om hörnens betydelse. Hur stort område finns innanför en ram med sidan 2? Varför?
– Fyll området i problemet med kuber och resonera om volymen.
– Undersök kvadraterna och låt gärna eleverna lära sig kvadraterna upp till $15 \cdot 15$.
– Undersök talserien $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots =$. Bygg eller rita så att sambandet med kvadraterna blir tydligt och resonera med eleverna om det.
– Undersök också talserien $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots =$ på motsvarande sätt.



I *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem* finns ett kapitel med rubriken Mönster. Där finns ytterligare problem och förslag till hur man kan arbeta.

Se också Benjamin 2002, 24; E 2006, 12 och 20; E 2007, 18; Benjamin 2007, 11; E 2008, 5.

Kalenderproblem

Problem 18, *Fem lördagar och söndagar,* aktualiserar kalendern. Att undersöka almanackan tycker många elever i den här åldern är intressant. Det är mycket som är lätt att ta för givet om man redan kan det, men för eleverna kan det vara nya upptäckter. Undersök hur året är indelat: kvartal, månader, veckor. Hur många veckor går det på ett år? Är det exakt 52 veckor? Är det alltid vecka 1 den 1 januari?

Hur är det med elevernas kunskaper om antal dagar i respektive månad? Känner de till ramsan, ”30 dagar har november, april, juni och september, 28 en allen, alla de övriga 31”. Den stämmer om det inte är skottår, då har februari 29 dagar. Resonera om antal olika veckodagar i en månad med 28, 30 respektive 31 dagar.

Låt eleverna markera innevarande månad i en tabell:

måndag	tisdag	onsdag	torsdag	fredag	lördag	söndag

Alla månader som har 30 dagar följs av en månad med 31 dagar, men en månad med 31 dagar kan följas av en månad med 28 (29), 30 eller 31 dagar.
– Vilket halvår har flest dagar? Är skolans vår- eller hösttermin längst?
– Hur många söndagar kan en månad ha som mest? Som minst?

Årets Junior 10 är också ett kalenderproblem:

> I en viss månad fanns det 5 måndagar, 5 tisdagar och 5 onsdagar. I den föregående månaden fanns det bara 4 söndagar. Vilket av följande gäller definitivt för den efterföljande månaden?
>
> Den har
> A: exakt 4 fredagar B: exakt 4 lördagar C: 5 lördagar
>
> D: 5 onsdagar E: situationen är omöjlig

Problem kring almanackan har förekommit i flera tidigare Kängurutävlingar, t ex: B 2004, 15; C 2004, 10; C 2006, 11; Benjamin 2007, 7.

Geometri

Som vanligt handlar flera problem om geometri. Det är naturligtvis ibland lättast att lösa dem konkret, men syftet med problemen är inte att hitta det korrekta svaret i första hand. Det konkreta arbetet ska hjälpa eleverna att få förståelse. Därför är det också viktigt att samtala om det konkreta arbetet och lyfta fram de samband som ska illustreras. Under tävlingen har eleverna löst problemen utan hjälpmedel. I efterarbetet kan eleverna jämföra hur de tänkt, dvs deras föreställning, med en konkret representation. Att tolka en tredimensionell bild exempelvis är inte lätt och många måste få återkommande möjligheter att jämföra bild och verklighet för att utveckla den förmågan.

2 *Klossbygge*. Låt eleverna konstruera det nästan fädiga bygget till de andra alternativen. De kan sedan göra liknande problem till varandra konkret, men där kamraten först får försöka lösa det utan att röra klossarna, bara titta.

Bygg efter ritning och rita av byggen ur olika perspektiv. Diskutera hur de olika alternativen ska beskrivas. Låt eleverna arbeta i par där den ena bygger och beskriver sitt bygge för kamraten, som inte får se hur det ser ut. Kamraten ska försöka bygga efter beskrivningen. Tala om betydelsen av att uttrycka sig tydligt med termer som vi är överens om betydelsen av.

Låt eleverna bestämma det totala antalet klossar i olika rätblock. Hjälp dem att upptäcka strukturen: antalet klossar i en rad, antalet rader i ett plan, antalet plan. Behandla olika volymenheter och diskutera när de används.

I nästan alla tidigare Kängurutävlingar finns det problem med klossar. Se också i boken *Geometri och rumsuppfattning* där dessa klossproblem är samlade och kommenterade med förslag för undervisningen.

3 *Pusselbitarna*. Undersök alla möjligheter att pussla ihop de fyra bitarna och se om det stämmer att antalet utbuktningar och inbuktningar antingen är lika många eller tar ut varandra. Låt eleverna göra liknande problem till varandra.

Liknande problem är E 2008, 10.

5 *Kvadratiska pappret* och 17 *Hörnen i en parallellogram* behandlar grundläggande geometriska objekt. Många elever känner igen och kan rätt benämna flera geometriska begrepp, men de behöver också få arbeta med definitioner. Diskutera egenskaper, se på antal sidor och antal hörn, på vinklar och symmetrier.

– Utgå från begreppet månghörning och gå sedan stegvis genom fyrhörningar, parallelltrapetser, parallellogram, rektanglar och till sist den speciella månghörningen kvadrat. Vilka egenskaper är gemensamma för alla?
– Vad är det som utmärker kvadraten och endast gäller för den?
– Vad är en romb? Är kvadraten en romb? Varför?

Med en bild eller diagram kan man klargöra samband och illustrera att alla kvadrater är rektanglar, kvadraten är en delmängd av rektanglar, och att rektanglar är parallellogrammer etc.

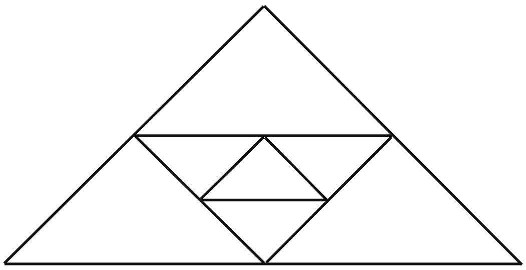
En form som saknar en svensk term är ”drake”. Det är en fyrhörning som har två par av lika långa sidor, men där dessa sidor ligger intill varandra. Rita upp en drake och låt eleverna beskriva den utifrån dess egenskaper.

Diskutera att bilder i geometri endast är idéskisser och kanske inte nödvändigtvis är perfekta bilder av de objekt de illustrerar. Visa hur vi med symboler kan markera egenskaper som har betydelse, t ex räta vinklar och lika långa sidor.

Undersök hur de olika formerna i problem 5, Kvadratiska pappret, kan konstrueras. Låt eleverna få argumentera för att den form de skapat är just den de menar att det är.
– Hur vet du och hur kan du övertyga oss om att detta är en rektangel?
– Diskutera och jämför olika lösningar. Vad är lika? Vad är olika?
– Jämför arean av triangeln och kvadraten.
– Hur många räta linjer behövs för att vi ska kunna få en kvadrat?

Tillåt vikningar och låt eleverna försöka att konstruera en kvadrat. Jämför storleken på den ursprungliga kvadraten och den nya.

Arbeta vidare med den rätvinkliga, likbenta triangeln. Skapa ett mönster genom att i en stor sådan triangel successivt rita in mindre trianglar genom att dela sidorna mitt på:



Jämför areorna av de olika trianglarna. Fortsätt att dela och att bygga på med större trianglar.
– Ge den inre trianglen arean 1. Hur stor är arean av de andra?
– Ge den största triangeln arean 1. Hur stor är arean av de andra?
Variera vinkeln mellan de lika benen i triangeln och undersök vidare.

Utveckla gärna till en bilduppgift och låt eleverna måla mönstret, eller till en slöjduppgift med lappar. Lek med andra geometriska former på motsvarande sätt. Att dela en form kan vara en bra utgångspunkt för resonmenag kring area.

Inom detta område finns det många tidigare problematt välja bland. Några av dem är:
B 2003, 15; B 2007, 14; E 2009, 2; B 2009, 2; B 2009, 9 och 13 samt C 2009, 5.

15 *Pusslet.* Undersök vilka av alternativen som kan placeras ut samtidigt, försök att få in så många som möjligt. Låt eleverna konstruera liknande problem till varandra. Resonera efteråt om hur de bitar som spärrar ska vara konstruerade.

Pentomino är ett klassiskt pussel. Bitarna består av fem kvadrater, därav namnet (penta = fem på grekiska). Visa på ordlikheten och låt eleverna ta reda på vad pentagon, Pentagon (i Washington), pentagram är.
– På hur många sätt kan man sätta samman fem kvadrater, om de ska sättas sida mot sida? Låt eleverna undersöka.
– Bygg ihop bitarna på olika sätt.
Om pentomino finns en mängd att läsa på webben. Se också problem 316 – 319 i *Geometri och rumsuppfattning.*

21 *Fyra trianglar i en rektangel.* Här utnyttjar vi att arean av en triangel är hälften av en rektangel.
– Hur stort är det vita området?
– Diskutera vilka mått och förutsättningar som är viktiga i problemet.
Ett tidigare problem är C 2007, 6.

Tal

4 *Vattenledningen*. Här får vi en konkret illustration för bråkräkning.
– Diskutera vad hälften av hälften är. Kanske känner någon igen ett gammalt uttryck: ”En halv halv kalv och en fjärdedel därifrån”. Se på andra språkliga uttryck, t ex hälften av en tredjedel, hälften av en sjättedel. Att förstå hälften av en fjärdedel är ofta lättare än $1/2 \cdot 1/4$. Resonera om kopplingen mellan dessa uttryckssätt.
– Variera mängden vatten i rören och dela upp vattenledningen i flera grenar.
Se också B 2008, 14.

6 *Tal i rutor.* Låt eleverna göra flera liknande problem och använd dem för återkommande överslagsräkning. Diskutera strategier, t ex att först inse att inget av de tre minsta talen kan vara summan och sen att se på entalssiffrorna.

7 *Frågesportsreglerna*. Undersök andra poängtal. Vilka är möjliga? Variera problemet med olika poängtal. Diskutera varför det alltid blir ett jämnt tal med dessa regler. Se efter mönster.

9 *Datumtal*. Gör motsvarande med jämna tal. Är de fler, färre eller lika många? Varför?
– Lek med olika serier, t ex primtal, multiplar av 3, 4 och 5.
– Låt eleverna anteckna ”roliga datum” och berätta varför de är speciella.

Att leka med tal är ett sätt att bekanta sig med tal och på det sättet utveckla sin taluppfattning. Det är också ett sätt att se hur tal används i vår omvärld. i samband med detta problem är det lämpligt att resonera om hur tiden räknas, vad årtalet står för och hur man kan beräkna tidens gång. Det är inte självklart för alla elever i dessa åldrar att åldersskillnaden mellan två personer förblir densamma. Pigan Lina hos Emil i Lönneberga hade vissa problem med det. Läs gärna det avsnittet för eleverna, de flesta kommer säkert att förstå det roliga nu även om det gick dem förbi när de som små lyssnade på berättelsen.

Även problem 12, *Talet 2011* kan vi använda för att få undersöka och leka med tal.
– Vilka av de listade talen är primtal?
– Varför är inget av talen delbart med 3? Diskutera och undersök delbarhetsregler med 2, 5, 10, 3 och 4.
– Vilket är det största fyrsiffriga talet? Det minsta?
– Lista alla fyrsiffriga tal med siffersumman 4. Vilka andra tal har siffersumman 4?

Ett dokument med flera problem kring talet 2011 att arbeta vidare med finns att hämta på: ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_talet_2011.pdf.

Att läsa

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation. Stockholm: Liber.*

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal.* NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. &Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2008 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem.*

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanen.