



# Kängurun – Matematikens hopp

## Student 2012

Här följer svar och lösningar, samt rättningsmall och redovisningsblanketter. Vi ger förslag till lösningsmetod. Bland eleverna i klassen finns säkert andra lösningsmetoder representerade. I det fortsatta arbetet med problemen kan dessa diskuteras och jämföras.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: [ncm.gu.se/kanguru/](http://ncm.gu.se/kanguru/)

Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på [kanguru@ncm.gu.se](mailto:kanguru@ncm.gu.se) eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 27 april.

Resultaten är värdefulla för oss i vårt fortsatta arbete med att utveckla Känguruproblemen. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att åtminstone fylla i redovisningsblankett A. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet.

Så snart du redovisat klassens resultat får du förslag på hur man kan arbeta vidare med problemen. Bland dem som gör en fullständig redovisning, både blankett A och B, lottar vi ut bokpaket.

## Svar och lösningar

- 1 E:13  
Vattennivån är över 30 cm från kl. 4 till kl.11 och från kl. 14 till kl. 20, sammanlagt 13 h.
- 2 C: 5  
Vi kallar de tre mittersta talen för  $a$ ,  $b$  och  $c$ .  
Det gäller att  
1:  $2ab = 30$  ger  $ab = 15$   
2:  $abc = 90$  och  $ab = 15$  ger  $c = 6$   
3:  $12bc = 360$  och  $c = 6$  ger  $b = 5$
- 3 A  
Vi kan konstatera att långa visaren anger minuter, mellanvisaren timmar och korta visaren sekunder.
- 4 C:  $32 \text{ cm}^2$   
Rektangelns area är  $64 \text{ cm}^2$ . Fyrhörningarna  $ANMD'$  och  $AMNB$  är kongruenta, så arean av fyrhörningen  $ANMD'$  är  $32 \text{ cm}^2$ .

5 C: 144 m<sup>2</sup>

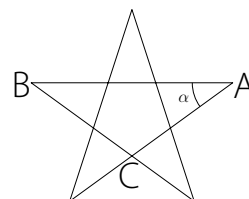
Eftersom längden är 16 m, så har diagonalen i var och en av de lika stora kvadraterna längden 8 m. Areal av en sådan kvadrat är 32 m<sup>2</sup>. Den tredje kvadratens sida är 8 m och arean är 64 m<sup>2</sup>. Den rätvinkliga triangeln har arean 16 m<sup>2</sup>. Hela områdets area i m<sup>2</sup> är  $2 \cdot 32 + 64 + 16 = 144$ .

6 E:  $x < -8$ 

$x^2 \geq 0$  för alla reella  $x$ ,  $x^3 \geq 0$  för  $x \geq 0$  och  $x^3 < 0$  för  $x < 0$ .  $x^2 > 64$  ger  $x > 8$  eller  $x < -8$ . För  $x > 8$  är  $x^3 > x^2$ . Alltså  $x < -8$ .

7 C: 36°

I en regelbunden femhörning är varje vinkel 108°. Triangel  $ABC$  är likbent. Det ger att vinkeln  $\alpha = (180^\circ - 108^\circ)/2 = 72^\circ/2 = 36^\circ$ .



8 A: 240

Det finns bara ett tvåsiffrigt tal som är en potens av 5, nämligen  $5^2 = 25$ . Det finns tre tvåsiffriga tal som är en potens av 2, nämligen  $2^4 = 16$ ,  $2^5 = 32$  och  $2^6 = 64$ . Om siffersumman av deras åldrar ska vara udda måste en ålder ha en udda siffersumma, det har 25, och en ålder ha en jämn siffersumma, det har 64. Sifferprodukten blir då  $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 240$ .

9 D: 20 %

För varje utflyktsmål var det 20 % som inte deltog. Då måste minst  $100\% - 4 \cdot 20\% = 20\%$  ha besökt alla fyra utflyktsmålen.

10 C: Det finns dubbelt så många flickor som pojkar i klassen.

Anta att det finns  $p$  pojkar och  $f$  flickor i klassen. Då gäller  $\frac{3,6p + 4,2f}{p + f} = 4,0$ . Ekvationen ger att  $f = 2p$ .

11 B:  $\sqrt{2}$ 

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{eller } \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}$$

12 D: 11

För varje naturligt tal  $n$  gäller att  $n^{200} < 5^{300} \Leftrightarrow n^{2 \cdot 100} < 5^{3 \cdot 100} \Leftrightarrow (n^2)^{100} < (5^3)^{100} \Leftrightarrow n^2 < 5^3 \Leftrightarrow n^2 < 125$  och det största naturliga tal  $n$  som uppfyller den sista olikheten är 11.

13 D: 37

Anta att det finns  $n$  platser. Då kan summan av platsernas nummer beräknas med  $n(n+1)/2$ . Eftersom en plats har sålts två gånger så är  $n(n+1)/2 < 857$ . Det ger  $n(n+1) < 1714$ . Det största heltalet  $n$  som uppfyller olikheten är  $n = 40$ . Då är summan av platsernas nummer 820. Alltså har man sålt dubbla biljetter till plats 37. För  $n < 40$  gäller  $n \leq 39$  som ger  $n(n+1)/2 \leq 780$  och eftersom den extra biljettens nummer inte kan vara större än  $n$  så kan summan inte vara 857.



14 D:  $f(x) = \frac{1}{x}$

Lösning 1: Vi beräknar sambandet  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  för var och ett av svarsalternativen.

A:  $f(x) = \frac{2}{x}$  ger  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{\frac{1}{x}} = 2x \neq \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{x}{2}$

B:  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  ger  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{x+1} \neq \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1$

C:  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  ger  $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1+x \neq \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$

D:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ger  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{f(x)}$

E:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  ger  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + x = \frac{1+x^2}{x} \neq \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2+1}$

Lösning 2:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ger  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{f(x)}$ . Ingen av de övriga funktionerna kan

uppfylla villkoret därför att  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$  ger för  $x=1$ ,  $f(1) = \frac{1}{f(1)}$  och

$(f(1))^2 = 1$ . För de övriga funktionerna har vi följande värden på  $(f(1))^2$ :

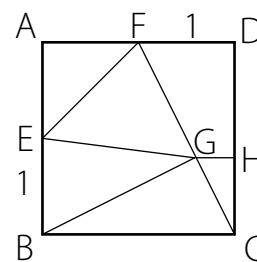
A: 4, B: 1/4, C: 4 och E: 4

15 B:  $\frac{4}{5}$

Vi ritar kvadraten  $ABCD$  och markerar det som är givet. Vi drar  $GH$  parallell med  $FD$ . Då är  $\triangle CGH$  likformig med  $\triangle CFD$ . Eftersom  $3CG = 2GF$  så är  $CG:CF = 2:5$  och  $GH = GH:FD =$

$CG:CF = \frac{2}{5}$ . Då är höjden  $h$  från  $G$  mot basen  $b = BE$  i  $\triangle BEG$

lika med  $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ . Arean är  $\frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$ .

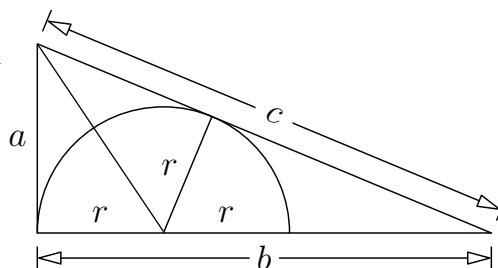


16 E:  $\frac{ab}{a+c}$

Dela triangeln i två trianglar med höjden  $r$  och baserna  $a$  och  $c$ .

Triangelns area  $= \frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2}$ . Förenkling

ger  $ab = (a+c)r$  och  $r = \frac{ab}{a+c}$ .

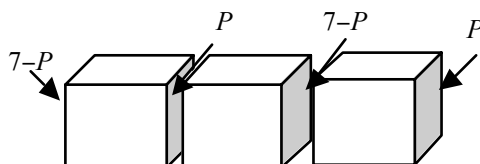
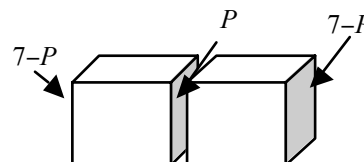


17 C:  $4\sqrt{3}$ 

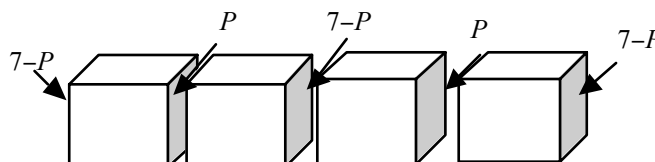
En triangel med vinklarna  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  och  $90^\circ$  (en halvliksidig triangel) har mellan sina sidor proportionerna  $1:\sqrt{3}:2$ . Låt talen 1 till 12 stå som punkternas namn. Mittpunkten betecknar vi  $M$ . Mittpunktsvinkeln mellan två på varandra följande timmar (tex vinkeln  $1,M,2$ ) är alltid  $360^\circ/12 = 30^\circ$ . Låt  $d(P,Q)$  beteckna avståndet mellan punkterna  $P$  och  $Q$ .  $d(8,10) = 12$ ,  $d(M,12) = d(9,10) = d(8,10)/2 = 6$ . Eftersom triangeln  $M,2,12$  är halvliksidig så är  $d(12,2) = d(M,12) \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3}$ . Eftersom triangeln  $M,1,12$  är halvliksidig så  $d(12,1) = d(M,12)/\sqrt{3} = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ . Då har vi  $x = d(1,2) = d(12,2) - d(12,1) = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ .

18 E: Det är omöjligt att exakt 2012 prickar kan vara synliga.

En rad tärningar bildar ett rätblock med fyra långa sidor och två "gavlar" bestående av bara en tärningssida var. Om man klistrar samman två tärningar så att två sidor som klistras samman har samma antal  $P$ , prickar, så kommer även gavlarna att ha samma antal,  $7 - P$  prickar var. Förlänger man en rad som har lika många prickar på gavlarna med en tärning enligt klistra-lika-till-lika regeln, så får man en rad med sammanlagd 7 prickar på gavlarna.



Förlänger man rad med sammanlagd 7 prickar på gavlarna, så får man en rad med lika många prickar på gavlarna.



Följaktligen har rader med udda antal tärningar summan 7 prickar på sina gavlar medan rader med jämna antal tärningar lika många prickar på gavlarna, dvs summan 2, 4, 6, 8, 10 eller 12. Antalet prickar på långsidorna är större men enkelt att beräkna, varje tärning bidrar med två par av motstående sidor, alltså med 14 prickar.

Om kängurun använder ett udda antal tärningar  $2n + 1$ , så blir det totala antalet synliga prickar  $(2n + 1) \cdot 14 + 7 = n \cdot 28 + 21$  dvs antalet synliga prickar ger resten 21 vid division med 28.

Om kängurun använder ett jämt antal tärningar,  $2n$ , så blir antalet prickar på långsidorna  $2n \cdot 14 = 28 \cdot n$  och alla synliga prickar ska vid division med 28 ge resten 2, 4, 6, 8, 10 eller 12. Talet 2012 ger resten 24 vid division med 28, så det är omöjligt.

19 E:  $45^\circ$ 

Låt  $AD$  vara en sådan median med  $D$  mitt på sidan  $BC$ ,  $BD = CD = r$ . En basvinkel i en likbent triangel är alltid spetsig. Vinkelsumman  $\angle ADC + \angle ADB$  är  $180^\circ$ , så minst en av vinklarna  $ADC$  och  $ADB$  är  $\geq 90^\circ$  och måste vara toppvinkeln i en av deltriangelerna. Alltså  $AD = r$  och  $A$  ligger på randen av cirkeln med diameter  $BC$  och  $\angle BAC = 90^\circ$ . Minsta vinkeln i en likbent rätvinklig triangel är  $45^\circ$ .



20 D: 113

Anta att man har gjort den första operationen  $k$  gånger och den andra  $l$  gånger

$$k+l=n>0. \text{ Det betyder att } \frac{7+k \cdot 8}{8+l \cdot 7} = \frac{7}{8}$$

$$56+64 \cdot k=56+49 \cdot l$$

$$64 \cdot k=49 \cdot l$$

då måste  $k$  och  $l$  ha samma tecken alltså vara båda positiva, och eftersom de är heltal så måste  $k$  vara delbart med 49 och  $l$  delbart med 64, alltså  $k \geq 49$  och  $l \geq 64$ , alltså  $n=k+l \geq 113$ . Det räcker också med  $k=49$  och  $l=64$ .  $(7+49 \cdot 8)/(8+64 \cdot 7)=7/8$ .

21 B:  $\frac{28}{3}\pi$ 

En rullning till kvadratens nästa sida är en rotation med  $360^\circ-90^\circ-60^\circ=210^\circ$ . Efter 4 sådana rullningar hamnar triangeln på samma ställe igen men då har den roterat  $4 \cdot 210^\circ=840^\circ$  eller  $7/3$  varv, alltså har alla dess hörn bytt placeringar. Upprepas detta 3 gånger, dvs 12 rullningar, så har triangeln förflyttats 4 gånger runt kvadraten och samtidigt roterat 7 hela varv och hela triangeln och alla dess hörn befinner sig i utgångsläget. Vid var tredje rullning ligger punkten  $P$  stilla. Vid 2 av 3 rullningar,

alltså vid 8 av alla 12 förflyttar sig punkten  $P$   $\frac{7}{6} \cdot \pi$  ( $=210^\circ$ ) längs en cirkelbåge med radien 1, dvs 8 gånger sträcker sig  $\frac{7}{6} \cdot \pi$  vilket gör  $\frac{28}{3}\pi$ .

22 D: 2012

Lösning 1:

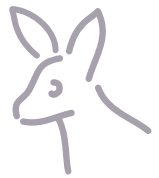
En linje parallell med linje  $y=x$  definieras med  $y=x+b$ . Linjen  $y=x+b$  skär parabeln  $y=x^2$  i en punkt med  $x$ -koordinaten  $x_1$  om och endast om  $(x_1)^2=x_1+b$  och  $x_1 \neq 1/2$  (om  $x_1=1/2$  så tangeras parabeln). Låt  $x_1$  vara  $x$ -koordinaten till en sådan skärningspunkt och  $x_2=1-x_1$ . Då har vi  $(x_2)^2=(1-x_1)^2=1+(x_1)^2-2x_1=1+(x_1+b)-2x_1=(1-x_1)+b=x_2+b$ , alltså är  $x_2$ -koordinaten för den andra skärningspunkten mellan linjen och parabeln. Summan av  $x$ -koordinaterna för skärningspunkterna för linjen  $y=x+b$  med parabeln  $y=x^2$  är  $x_1+x_2=x_1+(1-x_1)=1$ . Summan av  $x$ -koordinaterna för samtliga skärningspunkter är  $2012 \cdot 1=2012$ .

Lösning 2:

En linje parallell med  $y=x$  har ekvationen  $y=x+m$ . Koordinaterna för skärningspunkterna mellan linjen  $y=x+m$  och parabeln  $y=x^2$  kan bestämmas med

$$\text{ekvationen } x^2=x+m. \text{ Den har lösningen } x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+4m}{4}}, x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1+4m}{4}}.$$

Det ger  $x_1+x_2=1$ . Summan av  $x$ -koordinaterna för samtliga skärningspunkter är  $2012 \cdot 1=2012$ .



23 B: 3

När man har beräknat termer upp till  $a_{14}$ , så märker man att  $a_{13} = a_1$  och  $a_{14} = a_2$  och man ska använda samma operation för att beräkna nästa term  $a_{15}$  som för beräkning av  $a_3$  vilket betyder att allt ska upprepas med period 12. Summan av första 12 termer är 0, så summan av första 96 ska vara  $8 \cdot 0 = 0$  och de 4 sista termer blir samma som de 4 första 1, 1, 0, 1, så summan av alla blir 3.

24 E: 6

Summan av talen i mängden är  $1 + 2 + \dots + 26 = 26 \cdot 27 / 2 = 351$ . Då är

$$a \cdot b = 351 - a - b$$

$$ab + a + b = 351$$

$(a+1)(b+1) = 352$  med faktorerna  $a+1$  och  $b+1$  i mängden  $\{2, 3, 4, \dots, 27\}$  Av alla uppdelningar av 352 i två faktorer:  $11 \cdot 32 = 22 \cdot 16 = 44 \cdot 8 = 88 \cdot 4 = \dots$  är det bara i  $22 \cdot 16$  som båda faktorerna  $\leq 27$ . Differensen är alltså  $|a-b| = |(a+1) - (b+1)| = |22 - 16| = 6$ .



# Arbeta vidare med Student 2012

Det finns många sätt att arbeta med Känguruproblemen. Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. De är sällan rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill man inte arbeta genom en tävlings samtliga problem kan man exempelvis välja ut problem som har något gemensamt från de olika tävlingarna. De kan också komplimenteras med liknande problem från tidigare års tävlingar. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, [ncm.gu.se/kanguru](http://ncm.gu.se/kanguru). Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på [ncm.gu.se/node/4742](http://ncm.gu.se/node/4742)

## Tal och algebra

Många problem som förekommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grunden för arbete med tal i bråkform. För att lösa några av problemen krävs algebraiska färdigheter.

I flera av årets problem är potenser involverade. Repetera gärna potenser och potenslagar.



S2

Jämför Cadet nr 10 och lös de två problemen parallellt. Ta upp ekvationssystem och olika lösningsmetoder.

S6

Arbeta med potenser med udda och negativa heltalsexponenter. Arbeta även med olikheter, låt eleverna markera svarsalternativen på tallinjen. Rita graferna till funktionerna  $f(x) = x^2$  och  $f(x) = x^3$  i samma koordinatsystem. Hur kan de användas till att lösa uppgiften? Vilka  $x$  uppfyller olikheten  $x^2 < 64 < x^3$ ? Liknande problem är S2004 nr 5, S2005 nr 23.

S8

Ta upp begreppen potens av 2, potens av 5, siffersumma och sifferprodukt.

S11

Låt eleverna öva på omskrivning till en potens i basen 2. Arbeta med skrivsätten  $a^{\frac{n}{m}}$  och  $\sqrt[m]{a^n}$  för olika värden på basen  $a$ .

S12

Diskutera olika lösningsmetoder.

S13

Ta upp aritmetisk talföljd. Hur kan man bestämma  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ ?

S18

Resonera om vilken summa gaveltärningarna ger om man har ett udda respektive jämnt antal tärningar. Formulera uttryck för att beräkna det sammanlagda antalet synliga prickar om man har  $n$  tärningar. Liknande problem B2010 nr 14, S2008 nr 18, S2007 nr 1, S2001 nr 23, B2001 nr 20.

S20

Arbeta med uppgiften. Ta upp rationella tal.

S23

Ta upp olika talföljder, aritmetisk, geometrisk, Fibonacci. Liknande problem S2011 nr 19, S2009 nr 24, S2008 nr 22, S2004 nr 17.

S24

Ta upp begreppen mängd, delmängd, element, absolutbelopp.

## Geometri

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t.ex. att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

I samband med uppgifterna S4, S5, S7, S15, S16, S17, S19 och S21 kan det vara lämpligt att kontrollera elevernas kunskaper om geometriska begrepp. Be eleverna förklara vad som menas med linje, sträcka, skärningspunkt, parallelogram, parallelltrapets, månghörning (regelbundna och oregelbundna), likformighet och kongruens, inskriven respektive omskriven cirkel.





S4

Här har vi angett rektangelns mått som  $4\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ . Ta upp det skrivsättet. Ta upp likformighet och kongruens. Ta upp olika lösningsmetoder. Vilken area har femhörningen  $ABNMD$ ?

S5

Låt eleverna förklara hur de kan bestämma de olika områdenas mått.

S7

Ta upp vinklar och begreppen sidovinklar, supplementvinklar, likbelägna vinklar, vertikalvinklar och alternatvinklar. Vad kan eleverna säga om vinklarna i den regelbundna femuddiga stjärnan? Låt eleverna även lösa C2012 nr 11. Liknande problem J2010 nr 11, J2009 nr 10, GyC2005 nr 16, nr 21.

S15

Arbeta med lösningen. Ta upp likformighet och kongruens.

S16

Ta upp tangenter till cirklar och olika lösningsmetoder. Jämför denna uppgift med J2012 nr 16. Arbeta med dem parallellt.

S17

Ta upp halvliksidig triangel och förhållandena mellan sidorna. Be eleverna även bestämma avståndet mellan 4 och 8. Konstruera klockor som har andra former på urtavlan.

S19

Ta upp begreppen median, höjd, mittpunktsnormal och bisektris i samband med trianglar. Låt eleverna bestämma medianernas skärningspunkt och visa att den är triangelns tyngdpunkt. Fortsätt med höjdernas skärningspunkt, mittpunktsnormalernas och bisektrisernas skärningspunkt. Ta upp inskriven och inkriven cirkel.

S21

Arbeta med lösningen. Låt eleverna rita punkten  $P$ 's position allteftersom triangeln rullar utefter kvadraten. Markera även den väg  $P$  har rört sig mellan varje position. Liknande problem J2007 nr 15, nr 20. B2012 nr 6

## Funktioner

S1

Låt eleverna med ord beskriva grafen. Ta upp begreppen funktion, förändringshastighet, växande och avtagande. Liknande problem J2004 nr 20, S2007 nr 23, S2009 nr 16

S14

Diskutera med eleverna innebörden av  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ . Arbeta både algebraiskt och grafiskt med de olika funktionerna.

För att två funktioner ska vara *olika* räcker det att de har olika värden för någon punkt i domänen. För

$\frac{1}{f(x)}$  och  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  gäller mera (för A, B, C och E), de är olika för alla  $x$  i domänen. Undersök detta genom att försöka lösa ekvationerna  $\frac{1}{f(x)} = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Liknande problem S2010 nr 24.



S22

Arbeta med lösning av ekvationer av typ  $x^2 + px + q = 0$  och sambanden mellan  $p$  och  $q$  och ekvationens rötter. Ta upp Viètes formler.

## Logiskt resonemang

En stor del av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska fält. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån de föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ges också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

S9

Ett liknande problem var S2009 nr 17. Jämför problemen. Diskutera om minsta andel, största andel, ingen, alla.