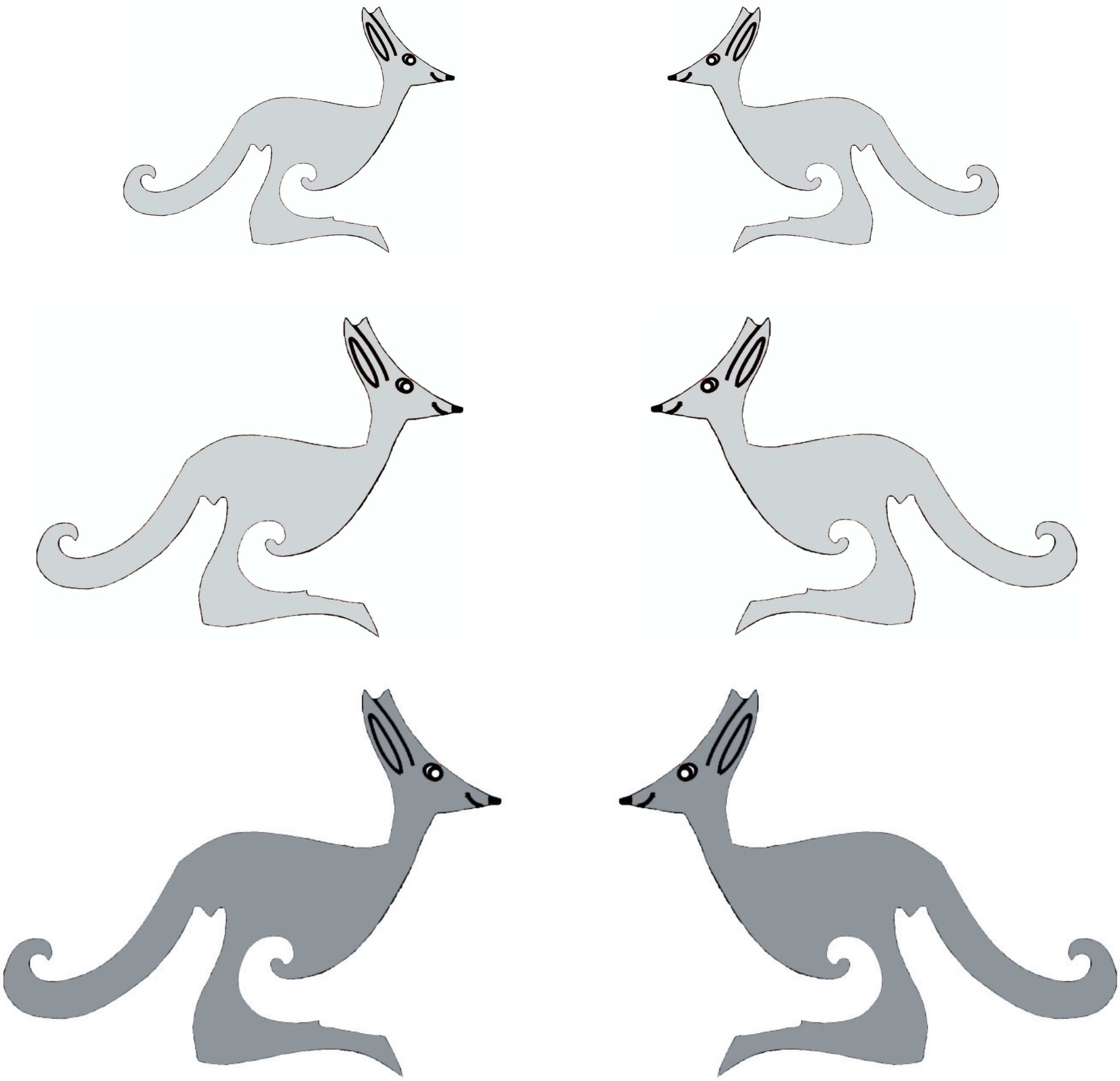

Kängurutävlingen

Matematikens Hopp

Cadet 2003

Lösningar, Arbeta vidare

Arrangeras av

Kungl. Vetenskapsakademien & NCM/Nämnaren

Svar och korta lösningar

Många problem kan lösas på flera sätt. Följande förslag ger inte någon heltäckande beskrivning. Diskutera olika lösningsförslag i klassen. I avsnittet *Arbeta vidare och utveckla problemidéerna* presenteras andra förslag till lösningar och olika möjligheter att bredda och fördjupa arbetet kring uppgifternas innehåll.

1.(C) Vik ett papper två gånger och klipp som figuren visar.

2.(D) Additionerna behöver inte utföras.

3.(E) Sidorna b och c är omöjliga då de gränsar till den kryssmarkerade sidan. a och d kommer efter en vikning att ligga intill den kryssmarkerade sidan.

4.(C) $|KL| = |KN| - |LN| = 22 - 15 = 7$,
$|LM| = |KM| - |KL| = 10 - 7 = 3$
Lösningen kan också göras i figuren.

5.(A) I den mörka och i den grå sektionen syns tre småkuber. Den grå bitens fjärde kub kan bara ha en placering, i mitten, och därför finns den fjärde svarta kuben rakt under den svarta hörnkuben.

6.(B) Lösningen får man enklast genom att rita upp träden och markera från vardera hållet.

7.(E) Innan rengöringen av burarna var papegojornas totala värde 5 x 6 000 kr = 30 000 kr. När den vackraste papegojan flugit iväg hade totala värdet sjunkit till 4 x 5 000 kr = 20 000 kr.

8.(E) Kvadraten med arean 81 cm^2 har sidan 9 cm och rektangeln med arean 18 cm^2 har måtten 2 cm x 9 cm. Den stora kvadratens sida är då 11 cm.

9.(E) För att få största antal skärningspunkter: Börja med två sträckor som skär varandra. Den tredje måste skära båda för att få maximalt antal. Det finns då tre skärningspunkter. Den fjärde sträckan måste skära alla tre och det största antalet skärningspunkter är sex.

10.(A) Rita ett F på OH och följ textens anvisning. Prova också med ett konkret föremål, t ex ett radergummi med text på.

11.(C) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Bottenlagrets halva omkrets är 9 cm, vilket gör att det måste vara två rader med sju kuber. Höjden blir 3 cm.

12.(C) Antag att poängen i yttre cirkelringen är a, i den mittersta b och i den inre c:
Måltavla 1: $a + 2b = 25$
Måltavla 2: $a + 2c = 35$
Måltavla 3: $b + 2c = 40$
Sista måltavlan: $a + b + c$
Lösningen kan man också få genom att jämföra tavlorna parvis, resonera och prova. Se också *Arbeta vidare …* .

13.(D) Totalt antal svarta streck är 17. De vita strecken, mellanrummen, är 16. Antal svarta breda streck är 13, 16 – 3. Antal svarta smala streck är då 17 – 13 = 4.

14.(A) Beteckna priset på ett glas med g, på en burk med b, på en flaska med f. Då gäller: $g + 3b = 4f$, $3g + 2b = 4f$. Det ger $b = 2g$.

15.(B) 22 rutor ska täckas. Det minsta tänkbara antalet trerutorsbitar är 2, då återstår 16 rutor, vilket är delbart med 4. Då blir det 4 fyrarutorsbitar. Kontrollera i figuren. Antag att Karl använder x bitar med fyra och y bitar med tre rutor. Då får vi $4x + 3y = 22$.

16.(D) För att vi ska få en triangel måste summan av de två kortare sidornas längder vara större än den längre sidans. Följande trianglar kan bildas:

5, 1 997, 2 000;	5, 2 000, 2 003;
10, 1 997, 2 000;	10, 1 997, 2 003;
10, 2 000, 2 003;	1 997, 2 000, 2 003.

17.(E) Om lasten utgjorde 80% utgjorde bilen resten, dvs 20%. Bilen väger 2000 kg vilket innebär att totala vikten på morgonen var 10 000 kg och lasten 8 000 kg. Med ekvation: Antag att lasten väger x kg. Det ger $x = 0{,}80(x + 2000)$.

Tippas en fjärdedel återstår 6 000 kg last och 2000 kg bil. Lasten är 75 % av totalvikten.

18.(B) Halva omkretsen av rektangeln är lika med längden på kvadratens sida.

19.(C) Eftersom Sara och Margareta nämns två gånger så måste de sagt varandras namn. Grannarna till Sara och Margareta står på ett avstånd som är större än avståndet mellan Sara och Margareta, men kortare än avståndet till den femte personen. Den personen står närmare Johanna än sin andra granne.

20.(D) Eftersom de vita ytorna tar bort lika mycket från de grå ytorna som från de svarta kan vi bortse från dem. Skillnaden mellan areorna blir därför $(11^2 + 7^2) – (9^2 + 5^2) = 64$ cm^2.
Alternativ:
Säg att de vita bitarna har areorna A, B och C.
Stort grått fält: $11^2 – A$
Stort svart fält: $9^2 – A – B$
Litet grått fält: $7^2 – B – C$
Litet svart fält: $5^2 – C$
De grå fältens area: 170 – (A + B + C)
De svarta fältens area: 106 – (A + B + C)

21.(C) Att minst två av fyra pennor har samma färg innebär att det finns *högst tre olika färger.* Att högst tre av fem pennor har samma färg innebär att det finns *som mest tre pennor av samma färg.* Eftersom det är totalt nio pennor kan det bara vara tre färger och tre pennor av samma färg, alltså tre blå pennor.

Om det bara fanns en eller två färger skulle det behövas fler än tre pennor av den ena färgen.

Om det fanns en eller två pennor av varje färg skulle det behövas mer än tre olika färger.

Om det fanns en eller två pennor av någon färg skulle det behöva finnas fler än tre pennor av en annan färg.

22.(D) Z måste vara antingen 1 eller 2 – adderas tre ental kan summan inte bli större än 27. Om Z är 2 måste Y vara 8 – varför? Den lösningen är omöjlig. Z måste vara 1. Olika förslag kan sen provas utifrån resonemang.
Additionen kan även skrivas i utvecklad form:

$x \cdot 10 + x \cdot 1 + y \cdot 10 + y \cdot 1 + z \cdot 10 + z \cdot 1 =$
$z \cdot 100 + y \cdot 10 + x \cdot 1$
som förenklas till
$10x + y + 11z = 100z$
$10x + y = 89z$
$10x + y < 100$ som ger $z = 1$, $x = 8$ och $y = 9$.

23.(C) Dra sträckorna *RQ* och *SP*. *PQRS* är ett parallellogram där arean är hälften av rektangelns. Den skuggade triangelns area är hälften av parallellogrammets.

Lösningen kan också fås genom att man flyttar punkten *T* till *R*. Detta förändrar inte trianglens area då varken basen *PQ* eller höjden mot denna ändras. Denna triangel, *PQR*, får en area som enklare kan beräknas.

24.(B) Flytta triangeln *MAN* så att *A* hamnar i hörnet *E*. Flytta på samma sätt triangeln *MBN* så att *B* hamnar i hörnet. Fortsätt på samma sätt med *MCN* och *MCD*. Då ser vi att summan av vinklarna är 45°.

Arbeta vidare och utveckla problemidéerna

Som vi flera gånger har påpekat kan problemen användas i undervisningen även efter tävlingsdagarna. Det är vår förhoppning att du ska finna många intressanta uppslag och att denna problemsamling ska kunna inspirera undervisningen under flera lektioner. Här är några förslag till arbeten. Många av känguruproblemen kan lösas med olika metoder t ex laborativa eller genom att man ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt och på så sätt komma fram till olika lösningsvarianter och vilken de finner enklast. De kan också formulera egna aktiviteter eller problem med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över exemplen. Till en del uppgifter har vi gett direkta kommentarer kring detta. Det finns naturligtvis mycket annat att göra, ytterligare förslag finns på *Kängurusidan* på *namnaren.ncm.gu.se*. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera där eller på *Kängurusidan* i Nämnaren. Vi rekommenderar dig också att studera Nämnarens Problemavdelning som finns i varje nummer av tidskriften, med elevproblem, lösningar och kommentarer.

1. För att utveckla sin rumsuppfattning är det lämpligt att eleverna själva får vika ett ark och klippa som figuren visar. Hur ska man vika arket och hur ska man klippa för att få alternativen A, B, D och E?

2. Byt ut 2003 mot andra tal och beräkna kvoten. Jämför resultaten. Byt därefter ut 2003 mot x. Ändra antal termer, ta t ex två termer i täljaren och fem i närmnaren, tre i täljaren och en i nämnaren. Hur resonerar vi om det istället för termer är en produkt av faktorer i täljare respektive nämnare?

3. Eleverna kan få i uppgift att rita upp en utvikt kub enligt figuren och vika till kuben. Var skulle X ha placerats på den utvikta kuben för att de andra alternativen skulle vara korrekta?

4. Låt eleverna markera punkterna på en tallinje och bortse från alternativen. Var kan M ligga om man följer texten utan att ha en bild? Vilket svar får man då? Vad händer med avstånden om punkterna ligger på den negativa sidan av tallinjen? Utöka med fler punkter och andra avstånd. Jämför olika lösningssätt.

5. Hur ser rätblocket ut från andra håll? Låt eleverna konstruera egna kombinationer och testa på varandra. Hur måste de tre bitarna vara hopsatta för att kunna bygga olika rätblock? Hur många olika rätblock sammansatta av de tre bitarna finns? Ändra till fyra småbitar med vardera tre småkuber.
Se även Ecolier 10 och Benjamin 14, 2003.

6. Blir det någon skillnad om Bodil gör tvärtom, dvs märker vart tredje träd på vägen dit och vartannat träd på hemvägen? Hur blir det om det är 18 träd? 19? Hur skulle vi kunna angripa problemet om vi märkt upp ett gigantiskt antal träd på samma sätt, fler än vi rimligtvis kan rita? Låt eleverna göra andra problem i andra situationer med liknande frågeställning.

7. Försök bestämma priser på alla papegojorna så att texten stämmer. Gör liknande uppgifter, t ex: I ett fotbollslag med 11 spelare är medelåldern 22 år. En av spelarna blir utvisad och medelåldern för de återstående 10 är då 26 år. Hur gammal var den utvisade spelaren?

8. Vilken area har den största kvadraten? Vilken area har den andra rektangeln? Vilken area har den lilla fyrhörningen i övre högre hörnet? Låt eleverna skriva upp hur varje delområdes area beräknas. Observera att:
$$11^2 = (9 + 2)^2 = 9^2 + 2 \times 2 \times 9 + 4^2$$
och hur denna likhet återspeglas i olika områdens areor. Gör liknande övningar med andra sidolängder och indelningar. Ta upp det mer generella fallet med sidolängder a och b. Anknyt till kvadreringsregeln.

9. Rita fyra sträckor så att du får 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 skärningspunkter. Vilket blir det största antalet skärningspunkter om du ritar fem sträckor? Försök ta fram en formel för största antalet skärningspunkter mellan n sträckor? Observera skillnaden i att rita sträckor och linjer. Fundera över motsvarande problem om det istället gällt linjer.

10. Rita ett **F** på ett papper och laborera med olika transformationer som t ex vridningar och speglingar. Spelar ordningen mellan dessa någon roll? Hur ser bilden ut om de utförs i omvänd ordning mot den i texten? Är de andra alternativen möjliga, vilka vridningar ska i så fall göras? Hur många olika varianter av bilder av **F** kan man få genom att använda olika 90-graders

vridningar med uppochned-vändningar. Hur blir det om vi byter **F** mot en triangel, en triangel med olikfärgade sidor, en fyrhörning etc.

11. Vilka dimensioner kan rätblock byggda av 42 identiska småkuber ha (med tanke på hur 42 kan uppdelas i faktorer)? Vilka begränsningsareor har rätblocken i de olika möjliga fallen? Hur många småkuber måste man ha för att kunna bygga en större kub? Vad händer om vi har 59 småkuber? 60? Hur många *olika* rätblock kan vi bygga och varför blir det så stor skillnad på antal möjligheter och formen på dessa?

12. Fundera över var den fjärde piltavlan ska placeras in i ordning mellan piltavlorna 1, 2 och 3 med tanke på i vilka fält pilarna sitter på de olika tavlorna. Bestäm poängen för varje fält på piltavlan. Vilken poängsumma är den högsta man kan få? Vilka poängsummor är möjliga att få med tre pilar? Konstruera piltavlor där andra strategier än gissa och prova blir nödvändiga.

13. Hur många olika streckkodsmarkeringar kan göras med 17 svarta streck, av två sorter, med vita mellanrum då det första och sista strecket ska vara svart? Börja med ett enklare problem med färre streck t ex 3 och 5. Låt eleverna ta reda på hur streckkodsmärkning på varor är uppbyggd.

14. Diskutera hur man kan lösa den här typen av uppgift t ex genom att resonera med en våg och istället för ”kostar” undersöka problemet kring ”väger” lika mycket. Låt eleverna konstruera liknande problem och diskutera hur de går till väga och hur den erfarenheten kan användas när man löser liknande problem.

15. Finns det fler lösningar på detta problem? Låt eleverna rita lösningarna. Dela in större rutnät i trerutors- och fyrarutorsbitar. Hur många rutor måste det finnas i rutnätet för att det ska finnas en lösning? Om det finns fler lösningar finns det något samband mellan lösningarna?

16. Diskutera villkoren för att en triangel ska kunna konstrueras av tre sträckor. Varför kan inte pinnen som är 2 cm användas? Hur ser de olika trianglarna ut? Gå ut på skolgården och låt elever markera hörn i trianglarna. Hur många fyrhörningar kan man bygga? Hur många femhörningar?

17. Ändra lastbilens vikt, men låt lasten utgöra 80 % som i texten. Tippa av en fjärdedel. Hur stor del av lasten ska man tippa av för att få de andra svarsalternativen?

18. Låt eleverna rita fyra likadana rektanglar som alla har omkretsen 40 cm och sedan fyra nya med samma omkrets – men annan längd och bredd. Lägg rektanglarna fyra och fyra som bilden visar. Resonera sedan kring arean av den yttre kvadraten KLMN och den inre vita kvadraten. Mellan vilka värden kan den inre vita kvadratens area variera? Mellan vilka värden varierar den yttre KLMN? Försök bevisa en eventuell förmodan genom att kalla sidorna i rektangeln a och b och teckna respektive area.

19. Låt elever 5 och 5 ställa sig i en ring i olika kombinationer och säga varandras namn. Kan varje namn höras exakt en gång? Skriv ner argument för att Sara och Margareta måste stå bredvid varandra?

20. Låt eleverna klippa till kvadrater med de angivna måtten och skjuta dem över varandra för att undersöka hur stor sammanlagd area som återstår. Undersök extremlägen.

21. Låt eleverna arbeta med 9 pennor i olika färger och undersöka de två påståendena om alla kombinationer av fyra och alla kombinationer av fem pennor.

22. Resonera med eleverna kring vilka värden X, Y och Z kan ha med tanke på hur de står i uppställningen. Vad kan Z stå för? Låt eleverna göra liknande problem till varandra.

23. Diskutera olika lösningsmetoder med eleverna. Låt eleverna rita rektangeln, markera punkterna och dra linjerna. Gör en kopia, klipp ut delarna, undersök och resonera kring vilka trianglar som är kongruenta. Gå sedan tillbaka till figuren och diskutera geometriska argument för detta. Rita figuren på prickpapper och jämför med geobräde.
Jämför med Cadet 23, 2002.

24. Det kan vara till hjälp att ha fem rutnät med en vinkel markerad per rutnät och ett tomt rutnät. Låt eleverna klippa ut vinklarna och flytta dem på lämpligt sätt. Diskutera olika lösningsmetoder med eleverna.