



## Problemlösning med hjälp av nycklar

I denna problemavdelning finns förutom ett antal geometriproblem även förslag på ett arbetssätt som avser underlätta för elever att komma igång med problemlösning och att redovisa sina tankegångar. Till sin hjälp får de ett antal "nycklar". Med detta menas påståenden som kan vara axiom, definitioner, satser etc. Skisser till lösningsförslag presenteras på Nämnaren på nätet.

**I** Kängurutävlingen krävs bara svar på frågorna och inga förklaringar. För att ytterligare underlätta ges fem svarsalternativ varav ett är rätt. Eleverna kan använda dem på olika sätt, från att få en bekräftelse när de bland svarsalternativen ser det svar som de själv har kommit fram till genom resonemang, till att gissa ett svar genom att utesluta de mest orimliga svarsalternativen och väga mellan de övriga. Detta i kombination med stor variation av problemens svårighetsgrad gör Kängurun till en tävling som ger utmaningar till duktiga elever och samtidigt gör den tillgänglig för alla.

I andra sammanhang krävs, förutom svaren, förklaringar, bevis att svaren är korrekta eller ibland bara bevis av givna påståenden. De flesta uppgifterna i NCM:s *Månadens problem* är Känguruproblem med borttagna svarsalternativ. Där välkomnas olika sorters svar och fullständiga lösningar värderas högt.

Här presenteras en idé till övning i problemlösning. Valda problem är lite svårare geometriproblem från Kängurutävlingarna. Ska några av dem användas i en lektion bör svar, förklaringar och bevis krävas. För att underlätta lösning av problemen och lösningarnas formulering, ges här ett antal påståenden (axiom, definitioner, kända satser mm), låt oss kalla dem "nycklar". Arbetet med varje problem får bestå av två delar: den första ska i allmänhet vara att välja en eller flera nycklar som ska användas i lösning av problemet och den andra att formulera

själva lösningen och rätt svar. Olika lösningar av samma problem kräver i allmänhet olika uppsättningar av nycklar.

Elever kan alltså bland nycklarna söka verktyg för att lösa ett problem eller, efter att ha kommit till en lösningssidé, ha nycklarna till stöd vid dess formulering. Lyckas de inte med en egen nyckeluppsättning kan de använda andras nycklar. Även en elev som själv formulerar sin egen lösning bör i efterhand se om och i så fall vilka av nycklarna som har använts. Kanske behöver nyckellistan kompletteras? Ibland är det så att trots att man har en klar lösningssidé är det först vid formuleringen av lösningen som man blir medveten om vilka nycklar man använder.

### Nycklar

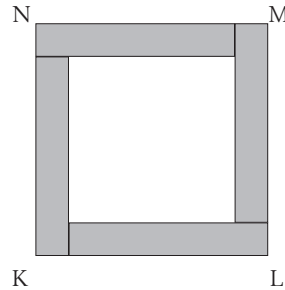
Är alla följande påståenden kända eller självklara? Kanske några behöver förklaras eller bevisas. Vad betyder orden, tex kvadrat i nyckeln E eller vertikalvinklar i F? Hur lyder de satser som bara ges med namn?

- A: Om en sträcka delas i flera sträckor så är dess längd lika med summan av delsträckornas längder.
- B: Om en geometrisk figur delas i flera geometriska figurer så är den ursprungliga figurens area summan av delfigurnas areor.

- C: Om en vinkel delas i flera vinklar så är dess storlek lika med summan av delvinklarnas storlekar.
- D: Alla punkter på en av två parallella linjer har lika stort avstånd till den andra linjen.
- E: Kvadratens area är kvadrat av dess sidolängd.
- F: Vertikalvinklar är lika stora.
- G: Basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.
- H: Alla vinklar i en liksidig triangel är lika stora.
- J: Summan av vinklar i en triangel är  $180^\circ$ .
- K: En triangelns area är hälften av area av en rektangel med samma bas och samma höjd.
- L: Om sträckan AB korsar sin spegelbild CD i punkten E så ligger E på symmetrilinjen.
- M: Om sträckan AB korsar sträckan CD i punkten E så gäller  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$  om och endast om vinklarna ABD och ACD är lika.
- N: Cirkelns radie som går till en tangeringspunkt är vinkelrät till tangenten.
- O: Trianglar med lika stora baser och lika höjder har lika stora areor.
- P: Trianglar med lika höjder har areor proportionella till basernas längder.
- Q: Summan av en rektangels längd och bredd är hälften av dess omkrets.
- R: För positiva tal  $a, b, c$  och  $d$  är följande tre likheter ekvivalenta  $a/b = c/d$ ,  $a/c = b/d$  och  $ad = bc$ .
- S: Pytagoras sats.
- T: Randvinkelsatsen och dess omvändning.
- U: Kordasatsen och dess omvändning.
- V: En liksidig triangel med sidolängden 2 har arean  $\sqrt{3}$ .
- W: En cirkel med radie  $r$  har arean  $\pi r^2$ .
- X: Om man förflyttar sig längs en sträcka, ändrar riktning och fortsätter längs en ny sträcka så är vinkeln mellan dessa sträckor plus kursändringen lika med  $180^\circ$ .
- Y: Två trianglar är likformiga om och endast om deras respektive vinklar är lika stora.

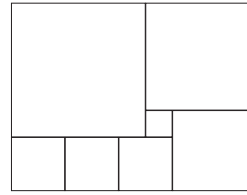
## Problem

- 4123 Kvadraten KLMN är sammansatt av en inre kvadrat och fyra likadana färgade rektanglar. Var och en av de färgade rektanglarna har omkretsen 40 cm.



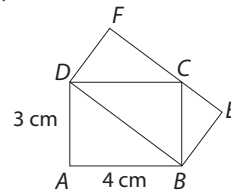
Hur stor area har kvadraten KLMN?

- 4124 Rektangeln är uppdelad i 7 kvadrater.



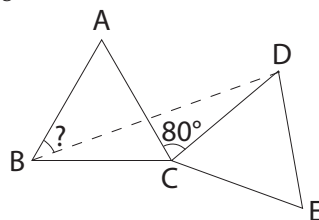
Hur många kvadrater av den minsta kvadratens storlek får plats i den största kvadraten?

- 4125 Två rektanglar ABCD och DBEF syns på bilden.



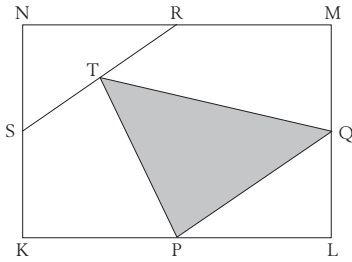
Vilken area har rektangeln DBEF?

- 4126 ABC och CDE är två lika stora liksidiga trianglar. Vinkeln  $ACD = 80^\circ$ .



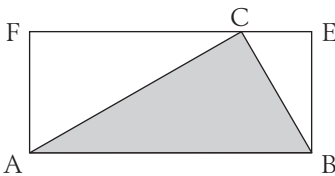
Hur stor är vinkeln ABD?

- 4127 I rektangeln KLMN betecknar P, Q, R och S mittpunkterna på sidorna KL, LM, MN respektive KN. T är mittpunkt på sträckan RS.



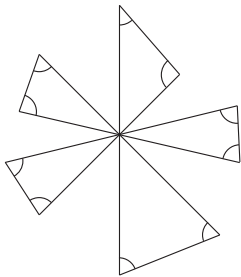
Hur stor del av arean hos rektangeln KLMN täcks av den skuggade triangeln, PQT?

- 4128 Bilden visar en rektangel ABEF och en triangel ABC.

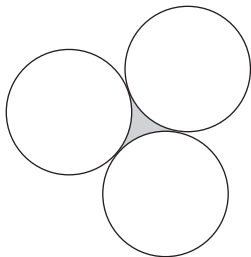


Man vet att vinkeln ACF är lika med vinkeln CBE. Om  $FC=6$  och  $CE=2$ , vilken är arean av ABC?

- 4129 Hur många grader är de tio markerade vinklarna tillsammans?

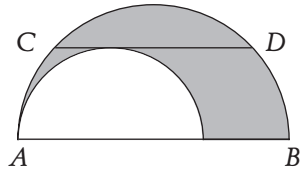


- 4130 Tre lika stora cirklar tangerar varandra som figuren visar.



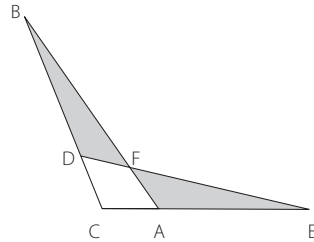
Hur stor del av figurens area är skuggad?

- 4131 Två halvcirklar är uppritade i figuren. Kordan CD, som har längd 4, är parallell med halvcirkelnas diameter AB och tangerar den mindre halvcirkel.

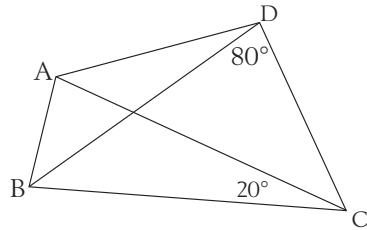


Hur stor area har det skuggade området?

- 4132  $DC=AC=1$ .  $CB=CE=4$ . Om arean av triangeln ABC är S, hur stor är då arean av fyrhörningen AFDC?



- 4133 I fyrhörningen ABCD är diagonalen BD bisektris till vinkeln ABC och  $AC=BC$ . Om vinkeln BDC är  $80^\circ$  och vinkeln ACB är  $20^\circ$ , hur stor är vinkeln BAD?



### Förslag till nyckelval

Stora bokstäver syftar på nycklar som ger lösningssiden, små på sådana som behövs i en fullständig lösning. Flera "ord" innebär olika lösningar.

**Svar**

4123	QAe	400 cm <sup>2</sup>
4124	Ae	25
4125	K, YB	12cm <sup>2</sup>
4126	Gcjh	40°
4127	DOk, Bk	1/4
4128	YRa	8·√3
4129	FCj, X	720°
4130	VNw	$(\sqrt{3}-0,5\pi)/(\sqrt{3}+2,5\pi)$
4131	NDsw	2·π
4132	LPB	2/5·S
4133	cgjYRM, cgjT, cgjU	120°

*Leo Rubinstein*